

Corrigé et barème – Statistiques : moyenne et écart-type

Indicateurs de position et de dispersion d'une série — programme de Mathématiques de 1re (sans spé)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Exercice 1 — Résumé d'une série brute

(4 pts)

- a) Somme : $16 + 21 + 24 + 28 + 33 + 37 + 41 + 46 + 58 = 304$ pour 9 valeurs, soit $\frac{304}{9} \approx 33,78$ min. (1)
- b) Effectif impair : médiane = valeur de rang $(9 + 1) \div 2 = 5$, soit 33 min. (1)
- c) $9 \div 4 = 2,25$ donc Q_1 est la valeur de rang 3 : 24 min. $3 \times 9 \div 4 = 6,75$ donc Q_3 est la valeur de rang 7 : 41 min. Écart interquartile : $41 - 24 = 17$ min. (1)
- d) Étendue : $58 - 16 = 42$ min. Elle n'est fixée que par les deux valeurs extrêmes, dont le trajet isolé de 58 min, alors que la moitié centrale des personnes tient dans 17 min seulement. (1)

Repère — Sur une série brute, on range, on compte, puis on lit un rang : médiane et quartiles ne se calculent jamais, ils se lisent.

Exercice 2 – Exercice 2 — Tableau d'effectifs et écart-type

(4 pts)

- a) Effectif : $3 + 8 + 12 + 5 + 2 = 30$. Somme pondérée : $0 \times 3 + 1 \times 8 + 2 \times 12 + 3 \times 5 + 4 \times 2 = 55$. Moyenne : $\frac{55}{30} \approx 1,83$ livre. (1)
- b) Effectifs cumulés : 3 ; 11 ; 23 ; 28 ; 30. Les rangs 15 et 16 tombent tous deux dans la valeur 2 : médiane = 2 livres. (1)
- c) Somme des $n_i x_i^2$: $8 \times 1 + 12 \times 4 + 5 \times 9 + 2 \times 16 = 133$, soit une moyenne des carrés de $\frac{133}{30} \approx 4,4333$. Variance : $4,4333 - 1,8333^2 \approx 4,4333 - 3,3611 \approx 1,07$. (1)
- d) $\sigma = \sqrt{1,0722} \approx 1,04$ livre. Les élèves s'écartent en moyenne d'environ un livre de la moyenne de la classe : la série est resserrée autour de 2 livres. (1)

Erreur fréquente — La valeur 0 a un effectif de 3 : elle compte dans l'effectif total, même si elle n'apporte rien à la somme.

Exercice 3 – Exercice 3 — Transformations affines

(4 pts)

- a) Translation de 2,5 : moyenne = $21,6 + 2,5 = 24,1$ °C ; écart-type inchangé = 4,5 °C. (1)
- b) Multiplication par 0,8 : moyenne = $0,8 \times 21,6 = 17,28$ °C ; écart-type = $0,8 \times 4,5 = 3,6$ °C. (1)
- c) Moyenne : $-1,5 \times 21,6 + 40 = -32,4 + 40 = 7,6$. Écart-type : $|-1,5| \times 4,5 = 6,75$. (1)
- d) Il a appliqué la formule de la moyenne à l'écart-type, en oubliant la valeur absolue. Un écart-type est une racine carrée : il ne peut pas être négatif. Multiplier par un coefficient négatif retourne la série, mais ne réduit pas sa dispersion. (1)

Le point clé — Dans $y = ax + b$, le « + b » déplace la série et ne touche jamais à la dispersion ; seul $|a|$ agit sur l'écart-type.

Exercice 4 – Exercice 4 — Série regroupée en classes*(4 pts)*

- a) Centres : 2 ; 6 ; 10 ; 14. Somme pondérée : $7 \times 2 + 15 \times 6 + 12 \times 10 + 6 \times 14 = 14 + 90 + 120 + 84 = 308$. Moyenne : $\frac{308}{40} = 7,7$ min (valeur approchée). (1)
- b) Somme des $n_i x_i^2$: $7 \times 4 + 15 \times 36 + 12 \times 100 + 6 \times 196 = 2\,944$, soit 73,6 en moyenne. $V = 73,6 - 7,7^2 = 73,6 - 59,29 = 14,31$ et $\sigma = \sqrt{14,31} \approx 3,78$ min. (1)
- c) Effectifs cumulés : 7 ; 22 ; 34 ; 40. La moitié de 40 est 20, franchie dans la deuxième classe car $7 < 20 < 22$: la classe médiane est $[4 ; 8[$. (1)
- d) Usagers concernés : $7 + 15 = 22$, soit $\frac{22}{40} = 0,55$, c'est-à-dire 55 %. (1)

Attention — Avec des classes, moyenne et écart-type sont des estimations ; seuls les pourcentages calculés sur les effectifs cumulés sont exacts.

Exercice 5 – Exercice 5 — Comparer deux ateliers*(4 pts)*

- a) Somme : $148,2 + 149,1 + 149,4 + 149,7 + 150,0 + 150,3 + 150,6 + 151,5 = 1\,198,8$ pour 8 tiges, soit $\frac{1198,8}{8} = 149,85$ mm. (1)
- b) Écarts à 149,85 : $\pm 1,65$; $\pm 0,75$; $\pm 0,45$; $\pm 0,15$. Somme des carrés : $2 \times (2,7225 + 0,5625 + 0,2025 + 0,0225) = 7,02$. $V = \frac{7,02}{8} = 0,8775$ et $\sigma = \sqrt{0,8775} \approx 0,94$ mm. (1)
- c) Les moyennes sont proches (149,6 et 149,85 mm), mais $0,8 < 0,94$: l'atelier A a le plus petit écart-type, c'est donc lui le plus régulier. (1)
- d) La moyenne n'est pas une longueur produite : elle résume la série sans rien dire de son étalement. Une moyenne conforme est compatible avec des pièces hors norme, par exemple si certaines mesurent 147 mm et d'autres 153 mm. Il faut examiner la dispersion, par exemple l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$, voire les valeurs extrêmes. (1)

À retenir — Comparer deux productions, c'est comparer un couple (moyenne ; écart-type) — jamais la moyenne seule.