Fonctions du second degré : paraboles et forme factorisée

Fiche méthode

(Maths 1re (tronc commun) · Phénomènes d'évolution · Modélisation quadratique)

La démarche pour une question sur une fonction du second degré

1. Je repère la forme donnée : ax^2 ou $ax^2 + c$, forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$, ou forme développée $ax^2 + bx + c$.

2. Je lis ce que la forme donne directement : le signe de a (sens de la parabole), $c = f(0)$, ou les racines.

3. Je trouve l'axe sans formule : milieu des racines, ou milieu des solutions de $f(x) = c$; le sommet est l'image de ce milieu.

4. Je conclus : extremum et variations par le signe de a, signe et inéquations par le tableau de signes, et une phrase avec l'unité dans un problème.

Le réflexe — le signe de a décide de tout : sens de la parabole, maximum ou minimum, signe à l'extérieur des racines.

Cas 1 · Rappels de seconde : x² = k, produit nul, développer

Réflexe — sans terme en x, j'isole x² ; sans terme constant, je factorise par x ; déjà factorisé, produit nul.

Exemple. Exemple : résoudre $7x^2 = 28$, puis développer $(x + 6)(2x - 1)$.

$x^2 = \dfrac{28}{7} = 4$, donc $x = -2$ ou $x = 2$ (deux solutions).
$(x + 6)(2x - 1) = 2x^2 - x + 12x - 6 = 2x^2 + 11x - 6$.

Attention — x² = k avec k > 0 a deux solutions opposées ; ne jamais diviser par x.

Cas 2 · Associer une parabole à une expression ax² + c

Réflexe — sens de la parabole → signe de a ; point sur l'axe des ordonnées → c ; un autre point → a.

Exemple. Exemple : une parabole tournée vers le haut a pour sommet $(0\,;-2)$ et passe par $(2\,;6)$. Déterminer $f(x) = ax^2 + c$ et ses racines.

Le sommet est sur l'axe des ordonnées : $c = f(0) = -2$.
$f(2) = 4a - 2 = 6$, donc $4a = 8$ et $a = 2$: $f(x) = 2x^2 - 2$ (et $a > 0$: tournée vers le haut).
$2x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 1$: les racines sont -1 et 1.

Attention — c déplace la parabole verticalement ; $-x^2$ n'est pas $(-x)^2$.

Cas 3 · Forme factorisée : racines, axe, sommet

Réflexe — racines lues en changeant le signe, axe au milieu, sommet = image du milieu.

Exemple. Exemple : $f(x) = 2(x - 1)(x - 11)$. Racines, axe, sommet et variations.

Racines : 1 et 11. Axe : $x = \dfrac{1 + 11}{2} = 6$.
$f(6) = 2 \times 5 \times (-5) = -50$: sommet $S(6\,;-50)$.
$a = 2 > 0$: f est décroissante sur $]-\infty\,;6]$, croissante sur $[6\,;+\infty[$, de minimum -50.

Attention — (x + 3) s'annule en -3 ; l'ordonnée du sommet se calcule, ce n'est pas a.

Cas 4 · Forme développée : l'axe en résolvant f(x) = c

Réflexe — f(x) = c, je factorise par x : les deux solutions ont la même image, l'axe passe par leur milieu.

Exemple. Exemple : $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$. Axe de symétrie et extremum.

$f(x) = 7 \iff 3x^2 - 12x = 0 \iff 3x(x-4) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = 4$.
L'axe est la droite $x = 2$, et $f(2) = 12 - 24 + 7 = -5$.
$a = 3 > 0$: minimum -5, atteint en $x = 2$.

Attention — les solutions de f(x) = c ne sont pas les racines ; l'axe est à leur milieu.

Cas 5 · Signe et inéquation avec la forme factorisée

Réflexe — signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre elles ; contrôle avec x = 0.

Exemple. Exemple : résoudre $-(x+2)(x-3) > 0$.

Racines -2 et 3 ; $a = -1 < 0$: l'expression est négative à l'extérieur des racines, positive entre elles.
Inégalité stricte : $S =]-2\,;3[$. Contrôle : pour $x = 0$, $-(2) \times (-3) = 6 > 0$.

Attention — inégalité stricte : crochets ouverts ; pour f(x) ⩾ k, signe de f(x) − k.

Cas 6 · Modéliser et optimiser

Réflexe — intervalle de la variable, forme adaptée, sommet dans le domaine, phrase avec l'unité.

Exemple. Exemple : la hauteur d'un jet d'eau est $h(x) = -0{,}4x(x-5)$ mètres à x mètres de la buse, pour $0 \leqslant x \leqslant 5$. Hauteur maximale ?

Racines 0 et 5 : le jet retombe à 5 m de la buse. Axe : $x = 2{,}5$, dans $[0\,;5]$.
$h(2{,}5) = -0{,}4 \times 2{,}5 \times (-2{,}5) = 2{,}5$ et $a = -0{,}4 < 0$: c'est un maximum.
Le jet monte au plus à 2,5 m, à 2,5 m de la buse.

Attention — le maximum est l'ordonnée du sommet ; si le sommet sort du domaine, l'extremum est à une borne.

Les pièges

- Oublier la solution négative de $x^2 = k$, ou la solution 0 en divisant par x.
- Lire la racine de (x + 3) comme 3 au lieu de −3.
- Confondre l'abscisse du sommet (milieu des racines) et son ordonnée (image de ce milieu).
- Prendre les solutions de f(x) = c pour des racines.
- Oublier que si a < 0, l'expression est positive entre ses racines.
- Mettre des crochets fermés pour une inégalité stricte, ou étudier le signe de f(x) au lieu de f(x) − k.
- Répondre par l'abscisse du sommet quand on demande le maximum, ou garder un sommet hors du domaine.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).