

Corrigé et barème – Le second degré

Modélisation quadratique : parabole, forme canonique, forme factorisée, racines et signe — enseignement de mathématiques de 1re (BO 2026)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Exploiter une forme canonique

(4 pts)

- a) $-(x^2 - 14x + 49) + 16 = -x^2 + 14x - 49 + 16 = -x^2 + 14x - 33$, donc $a = -1$, $b = 14$, $c = -33$. (1)
- b) Sommet $S(7; 16)$; comme $a = -1$ est négatif, 16 est un **maximum** atteint en $x = 7$. (1)
- c) $(x - 7)^2 = 16$ donne $x - 7 = 4$ ou $x - 7 = -4$, soit $x = 11$ ou $x = 3$. (1)
- d) $a < 0$: $f(x)$ est négatif sur $] -\infty ; 3]$, positif sur $]3 ; 11[$, négatif sur $]11 ; +\infty[$, et s'annule en 3 et 11. (1)

À retenir — La forme canonique donne le sommet sans calcul ; les racines s'en déduisent en isolant le carré.

Exercice 2 – Sommet, variations et équation

(4 pts)

- a) $3(x - 5)^2 - 10 = 3(x^2 - 10x + 25) - 10 = 3x^2 - 30x + 75 - 10 = 3x^2 - 30x + 65 = g(x)$. (1)
- b) $(x - 5)^2 \geq 0$ donc $g(x) \geq -10$, avec égalité pour $x = 5$: minimum -10 atteint en $x = 5$. (1)
- c) $g(2) = 3 \times 9 - 10 = 17$ et $g(7) = 3 \times 4 - 10 = 2$: g décroît de 17 à -10 sur $[2 ; 5]$, puis croît de -10 à 2 sur $[5 ; 7]$. (1)
- d) $3(x - 5)^2 - 10 = 17$ donne $(x - 5)^2 = 9$, donc $x = 8$ ou $x = 2$. (1)

Le point clé — Un trinôme change de sens de variation exactement en l'abscisse de son sommet.

Exercice 3 – Du produit au tableau de signes

(4 pts)

- a) $(x + 4)(x - 9) = x^2 - 5x - 36$, donc $h(x) = -2x^2 + 10x + 72$. (1)
- b) $h(x) = 0$ pour $x = -4$ ou $x = 9$. (1)
- c) $a = -2 < 0$: $h(x)$ est négatif sur $] -\infty ; -4[$, positif sur $] -4 ; 9[$, négatif sur $]9 ; +\infty[$. (1)
- d) $h(x) < 0$ pour $x < -4$ ou $x > 9$, soit $] -\infty ; -4[\cup]9 ; +\infty[$ (bornes exclues). (1)

Attention — Entre les racines, le trinôme est du signe contraire à celui de a : un a négatif inverse tout le tableau.

Exercice 4 – Optimiser un bénéfice

(4 pts)

- a) $-(x - 11)^2 + 25 = -(x^2 - 22x + 121) + 25 = -x^2 + 22x - 121 + 25 = -x^2 + 22x - 96 = B(x)$. (1)
- b) $(x - 11)^2 \geq 0$ donc $B(x) \leq 25$, égalité pour $x = 11$: bénéfice maximal de 25 centaines d'euros, soit 2 500 €, pour 11 objets. (1)
- c) $(x - 11)^2 = 25$ donne $x = 16$ ou $x = 6$: ce sont les seuils de rentabilité, le bénéfice étant positif entre 6 et 16 objets. (1)
- d) $-(x - 11)^2 + 25 \geq 16$ donne $(x - 11)^2 \leq 9$, soit $8 \leq x \leq 14$ objets. (1)

Repère — Dans un problème, on conclut toujours par une phrase avec l'unité et en vérifiant que la solution appartient au domaine.

Exercice 5 – Justifier et déterminer*(4 pts)*

- a) $\alpha = -6$ et $\beta = f(-6) = 36 - 72 + 43 = 7$, donc $f(x) = (x + 6)^2 + 7 \geq 7 > 0$: la parabole reste au-dessus de l'axe, l'élève a tort. (1)
- b) $p(x) = (x + 8)^2 + k - 64$; le sommet est sur l'axe des abscisses si $k - 64 = 0$, soit $k = 64$. (1)
- c) $f(x) = a(x + 1)^2 - 12$ et $f(1) = -4$ donnent $4a - 12 = -4$, donc $a = 2$ et $f(x) = 2(x + 1)^2 - 12$. (1)
- d) $2(x + 1)^2 = 12$ donne $(x + 1)^2 = 6$, donc $x = -1 + \sqrt{6}$ ou $x = -1 - \sqrt{6}$. (1)

Erreur fréquente — Un sommet n'est pas une racine : tant que l'ordonnée du sommet n'est pas nulle, il faut comparer son signe à celui de a .