Probabilités conditionnelles et indépendance

Fiche méthode

(Maths 1re (tronc commun) · Phénomènes aléatoires · Épreuve anticipée)

La démarche pour une question de probabilités

1. Je nomme les événements et je traduis l'énoncé : « parmi … », « sachant … », « chez les … » donnent une probabilité conditionnelle ; une proportion de l'ensemble, une probabilité simple.

2. Je choisis l'outil : tableau croisé (effectifs), arbre pondéré (pourcentages en cascade), arbre à n niveaux (épreuves répétées).

3. Je calcule à la main : quotient pour $P_A(B)$, produit le long d'un chemin, somme des chemins, contraire pour « au moins un ».

4. Je contrôle et je conclus : chaque probabilité est entre 0 et 1, chaque nœud fait 1, et ma phrase nomme la condition.

Le réflexe — savoir, à chaque calcul, ce que l'on sait déjà (la condition) et sur quelle population on raisonne.

Cas 1 · Probabilité, contraire, équiprobabilité

Réflexe — compter les issues favorables ; « pas », « aucun » : passer par le contraire.

Exemple. Exemple : une boîte contient 20 sachets de thé : 6 verts, 7 noirs et 7 à la menthe. On en prend un au hasard. Probabilité d'un thé noir ? d'un thé qui n'est pas vert ?

$\frac{7}{20} = 0{,}35$. « Pas vert » est le contraire de « vert » : $1 - \frac{6}{20} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Attention — Une probabilité est toujours entre 0 et 1 ; « A ou B » compte une seule fois les issues communes.

Cas 2 · Probabilité conditionnelle et tableau croisé

Réflexe — la condition va en indice et son effectif au dénominateur.

Exemple. Exemple : sur 500 voyageurs d'un train, 180 voyagent en première classe (F), dont 72 pour le travail (T). $P(F)$, $P(F \cap T)$ et $P_F(T)$?

$P(F) = \frac{180}{500} = 0{,}36$; $P(F \cap T) = \frac{72}{500} = 0{,}144$; $P_F(T) = \frac{72}{180} = 0{,}4$: 40 % des voyageurs de première classe voyagent pour le travail. Contrôle : $0{,}36 \times 0{,}4 = 0{,}144$.

Attention — P(A ∩ B) se divise par l'effectif total, P_A(B) par l'effectif de A.

Cas 3 · Arbre pondéré

Réflexe — multiplier le long d'un chemin, additionner les chemins, diviser pour inverser.

Exemple. Exemple : $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$. $P(B)$? $P_B(A)$?

$P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$, donc $P(B) = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32$.
$P_B(A) = \frac{0{,}18}{0{,}32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$.

Attention — Une branche porte P_A(B) ; le bout d'un chemin donne P(A ∩ B).

Cas 4 · Indépendance et épreuves répétées

Réflexe — comparer P(A ∩ B) et P(A) × P(B) ; compter les chemins ; « au moins un » = 1 − « aucun ».

Exemple. Exemple : $P(A) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}2$ et $P(A \cap B) = 0{,}09$: indépendants ? Puis on lance 3 fois une pièce équilibrée : probabilité d'au moins un pile ? d'exactement deux piles ?

$0{,}45 \times 0{,}2 = 0{,}09 = P(A \cap B)$: A et B sont indépendants. Pièce : aucun pile, $0{,}5^3 = 0{,}125$, donc au moins un pile, $1 - 0{,}125 = 0{,}875$. Exactement deux piles : 3 chemins de probabilité 0,125, soit 0,375.

Attention — Incompatibles n'est pas indépendants ; « au moins un succès » n'est jamais n × p.

Les pièges

- Confondre P_A(B), lue sur une branche, et P(A ∩ B), au bout d'un chemin.
- Inverser la condition : P_A(B) n'est pas P_B(A) (piège des faux positifs).
- Additionner des probabilités conditionnelles qui n'ont pas la même condition.
- Écrire P(A ∩ B) = P(A) × P(B) sans que l'indépendance soit donnée ou démontrée.
- Croire que des événements incompatibles sont indépendants.
- Calculer « au moins un succès » par n × p au lieu de 1 − (1 − p)ⁿ.
- Oublier que, sans remise, les probabilités du second tirage changent.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).