

Corrigé et barème – Probabilités conditionnelles et indépendance

Probabilité sachant un événement, arbres pondérés, probabilités totales et indépendance — programme de 1re, BO n° 14 du 02/04/2026

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Lecteurs d'un magazine

(4 pts)

- a) $P(A) = \frac{315}{900} = 0,35$ et $P(A \cap P) = \frac{189}{900} = 0,21$. (1)
- b) $P_A(P) = \frac{0,21}{0,35} = 0,6$ (soit $\frac{189}{315}$) : 60 % des abonnés lisent la version papier. (1)
- c) $P_P(A) = \frac{189}{450} = 0,42$: le dénominateur n'est plus l'effectif des abonnés mais celui des lecteurs papier, d'où un résultat différent. (1)
- d) $P(A) \times P(P) = 0,35 \times 0,5 = 0,175 \neq 0,21 = P(A \cap P)$: les événements ne sont pas indépendants. (1)

Erreur fréquente — Le dénominateur d'une probabilité conditionnelle est toujours l'effectif de la condition, jamais l'effectif total.

Exercice 2 – Deux transporteurs

(4 pts)

- a) Premier niveau : $P(T_1) = 0,55$ et $P(T_2) = 0,45$. Second niveau : $P_{T_1}(R) = 0,08$ et $P_{T_1}(\overline{R}) = 0,92$; $P_{T_2}(R) = 0,14$ et $P_{T_2}(\overline{R}) = 0,86$. (1)
- b) $P(T_1 \cap R) = 0,55 \times 0,08 = 0,044$. (1)
- c) $\{T_1 ; T_2\}$ est une partition, donc $P(R) = 0,55 \times 0,08 + 0,45 \times 0,14 = 0,044 + 0,063 = 0,107$. (1)
- d) $P_R(T_2) = \frac{0,063}{0,107} \approx 0,589$: près de 59 % des retards viennent de T2, qui ne traite pourtant que 45 % des colis. (1)

Le point clé — La formule des probabilités totales additionne les chemins menant à l'événement, après avoir multiplié le long de chaque chemin.

Exercice 3 – Distributeur automatique

(4 pts)

- a) $0,88^3 = 0,681472$. (1)
- b) $0,12^3 = 0,001728$. (1)
- c) 3 chemins : $3 \times 0,12 \times 0,88^2 = 3 \times 0,12 \times 0,7744 = 0,278784$. (1)
- d) Événement contraire de « les trois fonctionnent » : $1 - 0,681472 = 0,318528$. (1)

Repère — « Au moins une panne » se calcule par l'événement contraire, qui ne correspond qu'à un seul chemin de l'arbre.

Exercice 4 – Un filtre anti-spam*(4 pts)*

- a) $P(S \cap U) = 0,3 \times 0,95 = 0,285$ et $P(\overline{S} \cap U) = 0,7 \times 0,06 = 0,042$. (1)
- b) $P(U) = 0,285 + 0,042 = 0,327$. (1)
- c) $P_U(S) = \frac{0,285}{0,327} \approx 0,872$: environ 87 % des courriels classés suspects sont effectivement des spams, donc 13 % sont de fausses alertes. (1)
- d) Le nombre 6 % est $P_{\overline{S}}(U)$, c'est-à-dire le taux d'erreur sur les seuls courriels légitimes, et non le taux d'erreur global. Un courriel est mal classé s'il est un spam non détecté ou un courriel légitime déclaré suspect : $0,3 \times 0,05 + 0,7 \times 0,06 = 0,015 + 0,042 = 0,057$, soit 5,7 %. (1)

Attention — Un pourcentage annoncé porte toujours sur une population précise : il faut identifier la condition avant de l'utiliser.

Exercice 5 – Une proportion à déterminer*(4 pts)*

- a) $\{A ; B\}$ est une partition avec $P(A) = x$ et $P(B) = 1 - x$, donc $P(D) = 0,03x + 0,08(1 - x) = 0,03x + 0,08 - 0,08x = 0,08 - 0,05x$. (1)
- b) $P(D) = 0,08 - 0,05 \times 0,6 = 0,08 - 0,03 = 0,05$, soit 5 % de vis défectueuses. (1)
- c) $0,08 - 0,05x = 0,045$ donne $0,05x = 0,035$, donc $x = 0,7$. (1)
- d) $P(A \cap D) = 0,7 \times 0,03 = 0,021$, donc $P_D(A) = \frac{0,021}{0,045} \approx 0,467$: A fournit 70 % des vis mais moins de la moitié des vis défectueuses. (1)

À retenir — Avec un paramètre, on écrit d'abord $P(D)$ en fonction de ce paramètre par les probabilités totales, puis on résout l'équation.