

Corrigé et barème – Indices et taux d'évolution moyen

Indice base 100 et taux d'évolution moyen — programme de Mathématiques de 1re (sans spé)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Fréquentation d'un musée

(4 pts)

- a) $\frac{378}{540} \times 100 = 70$; $\frac{621}{540} \times 100 = 115$; $\frac{702}{540} \times 100 = 130$. (1)
 b) $\frac{621}{378} \approx 1,642857$, soit environ +64,29 %. (1)
 c) L'écart de 15 points se rapporte à l'indice 115 et non à 100 : le taux vaut $\frac{15}{115}$, ou directement $\frac{702}{621} \approx 1,130435$, soit environ +13,04 %. (1)
 d) $n = 5$ années et $CM = \frac{702}{540} = 1,3$; $1,3^{\frac{1}{5}} \approx 1,053874$, soit environ +5,39 % par an. (1)

Erreur fréquente — Un écart d'indices se lit en points : il ne devient un pourcentage qu'en le divisant par l'indice de départ.

Exercice 2 – Adhérents d'un club

(4 pts)

- a) $1,18 \times 0,88 \times 1,25 \times 1,06 = 1,37588$, soit environ 1,3759. (1)
 b) $1,37588 - 1 = 0,37588$, soit environ +37,59 %. (1)
 c) $n = 4$: $1,37588^{\frac{1}{4}} \approx 1,083041$, soit environ +8,30 % par an ; vérification $1,0830^4 \approx 1,3758$. (1)
 d) $425 \times 1,37588 \approx 584,7$, soit 585 adhérents. (1)

Le point clé — Les coefficients multiplicateurs se multiplient, puis on prend la racine n -ième de leur produit pour obtenir le taux moyen.

Exercice 3 – Racines n -ièmes et fonction $x \mapsto a^x$

(4 pts)

- a) $1,2^3 = 1,728$, donc $1,728^{\frac{1}{3}} = 1,2$ exactement (c'est l'unique réel positif de cube 1,728). (1)
 b) $t_m = 1,728^{\frac{1}{3}} - 1 = 1,2 - 1 = 0,2$, soit +20 % par an. (1)
 c) $1,2^2 = 1,44$ et $1,2^4 = 1,44^2 = 2,0736$; la fonction $x \mapsto 1,2^x$ étant strictement croissante, la solution est unique : $x = 4$. (1)
 d) $0 < 0,85 < 1$, donc $x \mapsto 0,85^x$ est strictement décroissante. Le montant restant dû après n années vaut $M_0 \times 0,85^n$: il est donc strictement décroissant, et tend vers 0 sans jamais l'atteindre. (1)

Repère — La fonction $x \mapsto a^x$ n'existe que pour $a > 0$: elle croît si $a > 1$ et décroît si $0 < a < 1$.

Exercice 4 – Loyer et revenu

(4 pts)

- a) $680 \times 1,125 = 765$, soit un loyer de 765 € par mois. (1)
 b) $\frac{1790}{1640} \times 100 \approx 109,1$. (1)
 c) En 2020 : $\frac{680}{1640} \approx 0,4146$, soit 41,5 % ; en 2024 : $\frac{765}{1790} \approx 0,4274$, soit 42,7 %. Le loyer pèse davantage, car il a augmenté de 12,5 % alors que le revenu n'a progressé que de 9,1 %. (1)
 d) $n = 4$: $1,125^{\frac{1}{4}} \approx 1,029884$, soit environ +2,99 % par an. (1)

Attention — Comparer deux indices de même base suffit à conclure : c'est le rapport des coefficients, pas leur différence, qui décrit l'évolution relative.

Exercice 5 – Raisonner sur les taux*(4 pts)*

- a) $CM = (1+t)(1-t) = 1-t^2$. Comme $0 < t < 1$, on a $0 < t^2 < 1$ donc $0 < CM < 1$. Alors $1 + t_m = CM^{\frac{1}{2}} < 1$ (la racine d'un nombre de $]0 ; 1[$ reste dans $]0 ; 1[$), d'où $t_m < 0$. (1)
- b) $CM = 1 - 0,4^2 = 0,84$ et $0,84^{\frac{1}{2}} \approx 0,916515$, soit environ $-8,35$ % par période. (1)
- c) On cherche $1,03^n > 1,5 : 1,03^{13} \approx 1,4685$ et $1,03^{14} \approx 1,5126$, donc $n = 14$. (1)
- d) Le journal divise le taux global par le nombre d'années ($\frac{50}{14} \approx 3,57$), ce qui revient à additionner les taux au lieu de multiplier les coefficients. Le taux correct est $1,5^{\frac{1}{14}} - 1 \approx 0,029385$, soit environ $+2,94$ % par an. (1)

À retenir — Une hausse et une baisse de même taux se soldent toujours par une perte, car $(1+t)(1-t) = 1-t^2 < 1$.