Fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$

Fiche méthode

(Maths 1re (tronc commun) · Phénomènes d'évolution · Variation exponentielle)

La démarche pour une question sur $x \mapsto a^x$

1. Je repère le modèle : valeur initiale V_0 (en $x = 0$), unité de temps, coefficient a sur une unité (un pourcentage devient un coefficient multiplicateur).

2. Je ramène tout à une même base avec les propriétés : produit → somme des exposants, quotient → différence, puissance → produit ; $a^{0,5} = \sqrt{a}$, $a^{1/n}$ = racine n-ième.

3. Je compare la base à 1 : croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$, et j'inverse le sens d'une inégalité dans ce cas.

4. Je conclus : valeur avec l'unité, seuil encadré par deux valeurs données, phrase dans le contexte.

Le réflexe — traduire l'énoncé en $V_0 \times a^x$ et comparer a à 1 : le calcul, le sens de variation et le seuil en découlent.

Cas 1 · Puissances entières et racine carrée

Réflexe — même base : j'additionne ou je multiplie les exposants ; même exposant : je multiplie les bases ; $\sqrt{a}$ est positif et son carré vaut a.

Exemple. Exemple : calculer $\dfrac{7^5 \times 7^2}{7^6}$ et $\sqrt{0{,}81}$.

$\dfrac{7^5 \times 7^2}{7^6} = \dfrac{7^7}{7^6} = 7^1 = 7$.
$0{,}9^2 = 0{,}81$ et $0{,}9 > 0$, donc $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$.

Attention — $(a^m)^p = a^{(mp)}$, pas $a^{(m+p)}$; et la racine d'une somme n'est pas la somme des racines.

Cas 2 · Modéliser par $V_0 \times a^x$

Réflexe — V_0 = valeur en $x = 0$; hausse de t % → $a = 1 + t/100$, baisse → $a = 1 - t/100$; $a^{0,5} = \sqrt{a}$.

Exemple. Exemple : un champignon couvre 25 cm² et sa surface augmente de 96 % par jour. Surface au bout d'une demi-journée ?

Coefficient journalier : $1 + 0{,}96 = 1{,}96 > 1$: croissance exponentielle, $S(x) = 25 \times 1{,}96^x$.
$S(0{,}5) = 25 \times \sqrt{1{,}96} = 25 \times 1{,}4 = 35$ cm².

Attention — $k \times a^x$ n'est pas $(k \times a)^x$, et $a^{0,5}$ n'est pas $a \times 0{,}5$.

Cas 3 · Simplifier avec les propriétés

Réflexe — base commune → exposants additionnés, soustraits ou multipliés ; exposant commun → bases multipliées.

Exemple. Exemple : écrire $A = \dfrac{6^{2,3} \times 6^{1,2}}{6^{1,5}}$ sous la forme d'un entier.

Numérateur : $6^{2,3+1,2} = 6^{3,5}$.
$A = 6^{3,5-1,5} = 6^2 = 36$.

Attention — aucune règle pour une somme : $a^x + a^y \neq a^{(x+y)}$.

Cas 4 · Exposant 1/n et fraction de période

Réflexe — a^(1/n) : nombre positif dont la puissance n-ième vaut a ; sur 1/n de période, coefficient C^(1/n).

Exemple. Exemple : une valeur est multipliée par 1,157 625 chaque année. Taux sur 4 mois ?

4 mois font $\frac{1}{3}$ d'année : coefficient $1{,}157\,625^{1/3}$.
Or $1{,}05^3 = 1{,}157\,625$, donc ce coefficient vaut 1,05 : +5 % tous les 4 mois.

Attention — un taux ne se divise pas : 15,762 5 ÷ 3 ≈ 5,25 % est faux.

Cas 5 · Comparer et résoudre

Réflexe — même base, puis comparaison des exposants ; sens inversé si $0 < a < 1$.

Exemple. Exemple : résoudre $0{,}5^x \leqslant 0{,}125$ dans $[0\,;+\infty[$.

$0{,}125 = 0{,}5^3$ et $0 < 0{,}5 < 1$: la fonction est décroissante.
$0{,}5^x \leqslant 0{,}5^3 \iff x \geqslant 3 : S = [3\,;+\infty[$.

Attention — avec une base entre 0 et 1, l'inégalité change de sens.

Cas 6 · Seuil, doublement, demi-vie

Réflexe — $V_0 \times a^x \geqslant S \iff a^x \geqslant S \div V_0$; deux valeurs consécutives qui encadrent ; conclusion avec le sens de variation.

Exemple. Exemple : $V(x) = 500 \times 1{,}12^x$. À partir de quand $V(x) \geqslant 1\,000$? On donne $1{,}12^6 \approx 1{,}974$; $1{,}12^7 \approx 2{,}211$; $1{,}12^{6{,}1} \approx 1{,}996$; $1{,}12^{6{,}2} \approx 2{,}019$.

$V(x) \geqslant 1\,000 \iff 1{,}12^x \geqslant 2$: on cherche le temps de doublement.
Au pas 1 : entre 6 et 7. Au pas 0,1 : $1{,}12^{6{,}1} < 2 < 1{,}12^{6{,}2}$, et V est croissante : à partir d'environ 6,2.

Attention — le temps de doublement ne dépend pas de V_0 et ne vaut pas 100 ÷ taux.

Les pièges

- Calculer a^0,5 comme a × 0,5 au lieu de √a.
- Écrire (a^x)^y = a^(x + y) au lieu de a^(xy).
- Appliquer une règle à une somme : $a^x + a^y \neq a^{(x+y)}$.
- Diviser un taux par n au lieu de prendre la racine n-ième du coefficient.
- Oublier d'inverser l'inégalité quand la base est comprise entre 0 et 1.
- Prendre une base négative ou nulle, ou garder −a quand on résout $a^2 = c$.
- Croire que le temps de doublement dépend de la valeur initiale.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).