

Corrigé et barème – Fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$ et variation exponentielle

Fonctions $x \mapsto a^x$ ($a > 0$), propriétés algébriques, sens de variation, lien avec les suites géométriques et les évolutions à taux constant

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Calculs et propriétés algébriques

(4 pts)

- a) $25^{1,5} = 25^1 \times 25^{0,5} = 25 \times 5 = 125$. (1)
- b) $11^{0,8} \times 11^{1,2} = 11^{0,8+1,2} = 11^2 = 121$. (1)
- c) $(1,5^4)^{0,5} = 1,5^{4 \times 0,5} = 1,5^2 = 2,25$. (1)
- d) Aucune règle ne porte sur une somme : $2^{0,5} + 2^{0,5} = 2 \times 2^{0,5} = 2^{1,5} \approx 2,83 \neq 2$. (1)

Erreur fréquente — Les règles de calcul portent sur les produits, les quotients et les puissances de puissances, jamais sur les sommes.

Exercice 2 – Variations, comparaisons et inéquation

(4 pts)

- a) $0 < 0,35 < 1$, donc $x \mapsto 0,35^x$ est strictement décroissante. (1)
- b) $1,13 > 1$: fonction croissante ; $2,6 > 2,06$, donc $1,13^{2,6} > 1,13^{2,06}$. (1)
- c) $0 < 0,35 < 0,45$ et $0,6 > 0$, donc $0,35^{0,6} < 0,45^{0,6}$. (1)
- d) $0,008 = 0,2^3$; fonction décroissante, donc $0,2^x \geq 0,2^3 \iff x \leq 3 : S = [0 ; 3]$. (1)

Attention — Avec une base comprise entre 0 et 1, le sens de l'inégalité s'inverse quand on passe aux exposants.

Exercice 3 – Valeur d'une œuvre d'art

(4 pts)

- a) Coefficient annuel 1,05 : $V(x) = 18\,000 \times 1,05^x$. (1)
- b) $V(6,5) = 18\,000 \times 1,05^{6,5} \approx 18\,000 \times 1,373\,2 \approx 24\,717$ €. (1)
- c) $1,05^{0,5} \approx 1,024\,70$: hausse d'environ 2,47 % par semestre. (1)
- d) $1,05^{14} \approx 1,980$ et $1,05^{15} \approx 2,079$; $1,05^{14,2} \approx 1,999\,4$ et $1,05^{14,3} \approx 2,009\,1$: doublement vers 14,3 ans. (1)

Le point clé — Le temps de doublement ne dépend que du coefficient 1,05, pas de la valeur d'achat.

Exercice 4 – Baisse du nombre d'adhérents

(4 pts)

- a) $N(x) = 3\,200 \times 0,86^x$; $0 < 0,86 < 1$ et $3\,200 > 0$, donc N est strictement décroissante. (1)
- b) $N(2,5) = 3\,200 \times 0,86^{2,5} \approx 3\,200 \times 0,685\,9 \approx 2\,195$ adhérents. (1)
- c) $0,86^5 \approx 0,470\,4 < 0,5$: la baisse vaut environ 52,96 %, donc plus de 50 %. (1)
- d) Les taux ne se divisent pas : le coefficient semestriel est $\sqrt{0,86} \approx 0,927\,4$, soit $-7,26$ % par semestre. (1)

Repère — Sur une fraction $1/n$ de période, le coefficient est la racine n -ième du coefficient, pas une fraction du taux.

Exercice 5 – Retrouver un modèle exponentiel

(4 pts)

- a) $f(0) = k = 500$; $500a^2 = 720$ donc $a^2 = 1,44$ et, comme $a > 0$, $a = 1,2$. (1)
- b) $f(1,5) = 500 \times 1,2 \times \sqrt{1,2} \approx 500 \times 1,314\,53 \approx 657,27$. (1)
- c) $1,2^3 = 1,728$ et $1,2^4 = 2,073\,6$; $1,2^{3,8} \approx 1,999\,4$ et $1,2^{3,9} \approx 2,036\,1$: doublement vers 3,9. (1)
- d) La base d'une fonction exponentielle doit être strictement positive : $(-1,2)^{0,5}$ n'a pas de sens ; seule $a = 1,2$ convient. (1)

Astuce — La valeur en 0 donne toujours k directement, car $a^0 = 1$; on en déduit ensuite a .

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).