Devoir surveillé – Suites et modèles d'évolution — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Écrire $8^{0,5} \times 2^{1,5}$ sous la forme d'un entier.

b) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 3$ et $u_5 = 2\,u_2$. Déterminer sa raison.

c) La valeur d'un ordinateur portable est multipliée par $0{,}562\,5$ en 2 ans. Donner son taux d'évolution annuel moyen.

d) En base 100 en 2020, l'indice d'une grandeur vaut 160 en 2024. Donner l'indice de 2020 en base 100 en 2024.

e) Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $0{,}25^{x} < 0{,}125$.

f) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1{,}5^{n} > 10$.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

Les quatre questions sont indépendantes.

a) Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$. On note I_n l'indice de u_n en base 100 au rang 0. Montrer que la suite (I_n) est géométrique, puis que le taux d'évolution entre les rangs n et $n+p$ ne dépend que de p.

b) Une grandeur strictement positive baisse d'un taux t, avec $0 < t < 1$. Montrer que le taux d'évolution qui la ramène à sa valeur initiale vaut $\dfrac{t}{1-t}$, puis qu'il est strictement supérieur à t.

c) Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 1$. On pose $d_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (d_n) est géométrique de raison q, puis que les écarts entre deux termes consécutifs de (u_n) sont de plus en plus grands.

d) Une grandeur strictement positive subit n évolutions successives de taux $t_1, \dots, t_n$, tous supérieurs ou égaux à un même réel $t > -1$. Montrer que son taux d'évolution moyen t_m vérifie $t_m \geqslant t$.

Exercice 3 – Problème — Les joueurs d'un jeu en ligne *(5 pts)*

Un jeu en ligne comptait $1\,600$ milliers de joueurs actifs à sa sortie. Un éditeur estime que ce nombre est divisé par 2 tous les 3 mois et le modélise par $J(x) = 1\,600 \times a^{x}$, en milliers, où $x \geqslant 0$ est le temps écoulé depuis la sortie, en mois, et a un réel strictement positif. On donne $0{,}5^{1/3} \approx 0{,}794$; $0{,}5^{2/3} \approx 0{,}630$; $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$.

a) Justifier que $a^{3} = 0{,}5$, en déduire a, puis le pourcentage de joueurs perdus chaque mois selon ce modèle. Pourquoi n'est-ce pas $\dfrac{50}{3}\,\%$?

b) Estimer le nombre de joueurs au bout d'un mois et demi, puis justifier que le modèle s'écrit aussi $J(x) = 1\,600 \times 0{,}5^{x/3}$.

c) Au bout de combien de mois le nombre de joueurs passe-t-il sous 100 milliers ?

d) Un concurrent propose un modèle linéaire : le jeu perd 200 milliers de joueurs chaque mois. On note $L_n = 1\,600 - 200n$ le nombre de joueurs, en milliers, au bout de n mois, pour n entier de 0 à 8. Comparer, mois par mois, les deux modèles pour n allant de 1 à 8.

e) Montrer que les deux modèles donnent le même taux d'évolution mensuel moyen sur les six premiers mois, et le calculer. Le modèle linéaire fait-il perdre le même pourcentage de joueurs chaque mois ?

Exercice 4 – Problème — Recoller deux séries d'indices *(4 pts)*

Un institut publie l'indice du prix moyen des logements anciens d'une ville. Jusqu'en 2020, l'indice était en base 100 en 2014 ; depuis, il est en base 100 en 2020.

Année	2014	2020	2024
Indice base 100 en 2014	100	133,1	—
Indice base 100 en 2020	—	100	121

On donne $\sqrt{1{,}1} \approx 1{,}048\,8$.

a) Calculer l'indice de 2024 en base 100 en 2014. Entre 2020 et 2024, de combien de points cet indice augmente-t-il, et de quel pourcentage ?

b) Montrer que le taux d'évolution annuel moyen du prix est le même de 2014 à 2020 et de 2020 à 2024, et en donner une valeur approchée.

c) En déduire, sans calculer de nouvelle racine, le taux d'évolution annuel moyen de 2014 à 2024. Justifier.

d) On suppose que l'indice continue d'évoluer à ce rythme après 2024. Déterminer la première année où l'indice en base 100 en 2014 dépassera 200.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Deux moyennes *(4 pts)*

Dans cet exercice, a, b et c désignent trois réels strictement positifs.

a) Déterminer le réel $x > 0$ tel que 4 ; x ; 9 soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique, puis le réel y tel que 4 ; y ; 9 soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Comparer x et y.

b) Montrer que a ; b ; c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = ac$, et trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $2b = a + c$.

c) Montrer que $\dfrac{a+c}{2} - \sqrt{ac} = \dfrac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{c}\right)^2}{2}$. En déduire que si a ; b ; c sont à la fois trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique, alors $a = b = c$.

d) Une grandeur subit deux évolutions successives de taux t_1 et t_2, avec $t_1 > -1$ et $t_2 > -1$. Montrer que son taux d'évolution moyen t_m vérifie $t_m \leqslant \dfrac{t_1 + t_2}{2}$. Application : le cours d'une action augmente de $90\,\%$, puis baisse de $52{,}5\,\%$; comparer t_m et la moyenne des deux taux. On donne $0{,}95^2 = 0{,}902\,5$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).