Corrigé et barème – Suites et modèles d'évolution — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) $8^{0{,}5} = \left(2^3\right)^{0{,}5} = 2^{1{,}5}$, donc $8^{0{,}5} \times 2^{1{,}5} = 2^{1{,}5+1{,}5} = 2^3 = 8$. (0,5 pt) (0,5)

b) $u_5 = 3 + 5r$ et $u_2 = 3 + 2r$: $3 + 5r = 6 + 4r$, donc $r = 3$. Contrôle : $u_5 = 18 = 2 \times 9 = 2\,u_2$. (0,5 pt) (0,5)

c) $CM = 0{,}562\,5$ sur $n = 2$ ans. Comme $0{,}75^2 = 0{,}562\,5$ et $0{,}75 > 0$, $1 + t_m = 0{,}562\,5^{1/2} = 0{,}75$: $t_m = -25\,\%$ par an (et non $-43{,}75 \div 2 \approx -21{,}9\,\%$). (0,5 pt) (0,5)

d) $\dfrac{100}{160} \times 100 = 62{,}5$. (0,5 pt) (0,5)

e) $0{,}25^x = \left(0{,}5^2\right)^x = 0{,}5^{2x}$ et $0{,}125 = 0{,}5^3$. Comme $0 < 0{,}5 < 1$, la fonction $x \mapsto 0{,}5^x$ est décroissante : $0{,}5^{2x} < 0{,}5^3 \iff 2x > 3 \iff x > 1{,}5$. $\mathcal{S} =]1{,}5\,;+\infty[$. (0,5 pt) (0,5)

f) $1{,}5^2 = 2{,}25$; $1{,}5^4 = 2{,}25^2 = 5{,}062\,5$; $1{,}5^5 = 7{,}593\,75 \leqslant 10$; $1{,}5^6 = 11{,}390\,625 > 10$. La suite $(1{,}5^n)$ est croissante, donc $n = 6$. (0,5 pt) (0,5)

Méthode — Pour comparer des puissances de bases différentes, on cherche une base commune ($8 = 2^3$, $0{,}25 = 0{,}5^2$), puis on compare les exposants, en changeant le sens si la base est comprise entre 0 et 1.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

a) $I_n = \dfrac{u_n}{u_0} \times 100 = \dfrac{u_0\,q^n}{u_0} \times 100 = 100\,q^n$, donc $I_{n+1} = q\,I_n$: (I_n) est géométrique de raison q et de premier terme 100. Entre les rangs n et $n+p$, le coefficient multiplicateur est $\dfrac{I_{n+p}}{I_n} = \dfrac{100\,q^{n+p}}{100\,q^n} = q^p$: le taux $q^p - 1$ ne dépend pas de n. Par exemple, avec $q = 0{,}6$, l'évolution sur deux rangs vaut toujours $0{,}36 - 1 = -64\,\%$ (et non $-80\,\%$). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) La baisse a pour coefficient $1 - t$; pour revenir à la valeur initiale, il faut multiplier par $\dfrac{1}{1-t}$, soit un taux $\dfrac{1}{1-t} - 1 = \dfrac{1-(1-t)}{1-t} = \dfrac{t}{1-t}$. Comme $0 < 1 - t < 1$ et $t > 0$, diviser t par $1 - t$ donne un nombre plus grand que t : $\dfrac{t}{1-t} > t$. Par exemple, après une baisse de $50\,\%$, il faut une hausse de $\dfrac{0{,}5}{0{,}5} = 1$, soit $+100\,\%$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $d_n = q\,u_n - u_n = (q-1)\,u_n$, donc $d_{n+1} = (q-1)\,u_{n+1} = (q-1)\,q\,u_n = q\,d_n$: (d_n) est géométrique de raison q, de premier terme $d_0 = (q-1)\,u_0 > 0$. Ses termes sont positifs et sa raison q est supérieure à 1 : (d_n) est strictement croissante, les écarts grandissent (alors qu'ils sont constants, égaux à la raison, pour une suite arithmétique). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) Pour tout i, $1 + t_i \geqslant 1 + t > 0$; en multipliant ces inégalités entre nombres positifs, $CM = (1+t_1)\cdots(1+t_n) \geqslant (1+t)^n$. Raisonnons par l'absurde : si $1 + t_m < 1 + t$, ces deux nombres étant positifs, $(1+t_m)^n < (1+t)^n \leqslant CM$, ce qui contredit $(1+t_m)^n = CM$. Donc $1 + t_m \geqslant 1 + t$, c'est-à-dire $t_m \geqslant t$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour montrer qu'une suite est géométrique, on exprime le terme suivant en fonction du terme courant ($I_{n+1} = q\,I_n$, $d_{n+1} = q\,d_n$) : le facteur obtenu, indépendant de n, est la raison.

Exercice 3 – Problème — Les joueurs d'un jeu en ligne *(5 pts)*

a) Le nombre est divisé par 2 en 3 mois : $J(3) = 1\,600\,a^3 = 800$, donc $a^3 = 0{,}5$. a est le nombre positif dont le cube vaut $0{,}5$: $a = 0{,}5^{1/3} \approx 0{,}794$. Le jeu perd environ $1 - 0{,}794 = 0{,}206$, soit $20{,}6\,\%$ de ses joueurs par mois. Trois baisses de $\dfrac{50}{3}\,\%$ donneraient le coefficient $\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{125}{216} \approx 0{,}579$, soit $-42\,\%$ environ et non $-50\,\%$: les baisses se multiplient. (0,5 pt pour a, 0,5 pt pour le pourcentage et l'explication) (1)

b) $J(1{,}5) = 1\,600 \times a^{1{,}5} = 1\,600 \times \left(a^3\right)^{0{,}5} = 1\,600 \times \sqrt{0{,}5} \approx 1\,600 \times 0{,}707 = 1\,131{,}2$ milliers, soit environ 1,13 million de joueurs. Et $a^x = \left(0{,}5^{1/3}\right)^x = 0{,}5^{x/3}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $J(x) < 100 \iff 0{,}5^{x/3} < \dfrac{100}{1\,600} = 0{,}062\,5 = 0{,}5^4$. Comme $0 < 0{,}5 < 1$, $t \mapsto 0{,}5^t$ est décroissante : $\dfrac{x}{3} > 4 \iff x > 12$. Le nombre de joueurs passe sous 100 milliers après 12 mois, soit un an ($J(12) = 100$ exactement). (1 pt) (1)

d) $J(n) = 1\,600 \times 0{,}5^{n/3}$ se calcule avec les propriétés : $J(3) = 800$, $J(6) = 400$, $J(1) \approx 1\,600 \times 0{,}794 \approx 1\,270$, $J(2) \approx 1\,600 \times 0{,}630 = 1\,008$, $J(4) = 800 \times 0{,}5^{1/3} \approx 800 \times 0{,}794 \approx 635$, $J(5) = 800 \times 0{,}5^{2/3} \approx 800 \times 0{,}630 = 504$, $J(7) = 400 \times 0{,}5^{1/3} \approx 400 \times 0{,}794 \approx 318$, $J(8) = 400 \times 0{,}5^{2/3} \approx 400 \times 0{,}630 = 252$ (valeurs calculées avec les valeurs approchées données). Modèle linéaire : 1 400 ; 1 200 ; 1 000 ; 800 ; 600 ; 400 ; 200 ; 0. Le modèle linéaire donne plus de joueurs de 1 à 5 mois, autant au bout de 6 mois (400 milliers), puis moins à 7 et 8 mois. (0,5 pt pour les valeurs, 0,5 pt pour la comparaison) (1)

e) Dans les deux modèles, le nombre passe de 1 600 à 400 milliers en 6 mois : même coefficient global 0,25, même nombre de périodes, donc même taux moyen. $1 + t_m = 0{,}25^{1/6} = \left(0{,}5^2\right)^{1/6} = 0{,}5^{1/3} \approx 0{,}794$: $t_m \approx -20{,}6\,\%$ par mois. Mais le modèle linéaire perd $\dfrac{200}{1\,600} = 12{,}5\,\%$ le premier mois et $\dfrac{200}{600} \approx 33{,}3\,\%$ le sixième : le taux moyen lisse des évolutions très différentes. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — « Divisé par 2 en 3 mois » ne signifie pas « $-\dfrac{50}{3}\,\%$ par mois » : le coefficient mensuel est le nombre positif dont le cube vaut 0,5, environ 0,794.

Exercice 4 – Problème — Recoller deux séries d'indices *(4 pts)*

a) Le prix est multiplié par 1,331 de 2014 à 2020, puis par 1,21 de 2020 à 2024 : en base 100 en 2014, l'indice de 2024 vaut $133{,}1 \times 1{,}21 = 133{,}1 + 27{,}951 = 161{,}051$. Il gagne $161{,}051 - 133{,}1 = 27{,}951$ points, soit une hausse de $21\,\%$ (et non de $27{,}951\,\%$). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) $1{,}1^2 = 1{,}21$ et $1{,}1^3 = 1{,}331$. De 2014 à 2020 (6 ans) : $1 + t_m = 1{,}331^{1/6} = \left(1{,}1^3\right)^{1/6} = 1{,}1^{1/2}$. De 2020 à 2024 (4 ans) : $1 + t_m = 1{,}21^{1/4} = \left(1{,}1^2\right)^{1/4} = 1{,}1^{1/2}$. Même taux : $\sqrt{1{,}1} - 1 \approx 0{,}048\,8$, soit environ $+4{,}88\,\%$ par an. (0,5 pt pour l'égalité, 0,5 pt pour la valeur) (1)

c) Sur 10 ans, le coefficient global est $161{,}051 \div 100 = 1{,}610\,51 = 1{,}1^3 \times 1{,}1^2 = 1{,}1^5 = \left(\sqrt{1{,}1}\right)^{10}$: le taux moyen est encore $\sqrt{1{,}1} - 1 \approx 4{,}88\,\%$. En effet, 6 ans puis 4 ans au même taux moyen équivalent à 10 ans à ce taux. (1 pt) (1)

d) k années après 2024, l'indice vaut $161{,}051 \times \left(\sqrt{1{,}1}\right)^k = 100 \times 1{,}1^{5 + k/2}$, qui croît avec k. Pour $k = 4$: $100 \times 1{,}1^7 = 161{,}051 \times 1{,}21 \approx 194{,}87 < 200$. Pour $k = 5$: $194{,}87 \times \sqrt{1{,}1} \approx 194{,}87 \times 1{,}048\,8 \approx 204{,}4 > 200$. L'indice dépasse 200 pour la première fois en $2024 + 5 = 2029$. (1 pt) (1)

Astuce — Reconnaître des puissances d'un même nombre ($1{,}331 = 1{,}1^3$, $1{,}21 = 1{,}1^2$) permet de calculer des racines n-ièmes sans calculatrice, avec la règle $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Deux moyennes *(4 pts)*

a) Géométrique : $\dfrac{x}{4} = \dfrac{9}{x}$, soit $x^2 = 36$, et $x > 0$, donc $x = 6$ (raison 1,5). Arithmétique : $y - 4 = 9 - y$, soit $y = 6{,}5$ (raison 2,5). On a $x < y$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) Les termes étant strictement positifs, a ; b ; c sont consécutifs dans une suite géométrique si et seulement si on multiplie par le même nombre pour passer de a à b et de b à c : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \iff b^2 = ac$. Ils sont consécutifs dans une suite arithmétique si et seulement si on ajoute le même nombre : $b - a = c - b \iff 2b = a + c$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{c}\right)^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{c} + c = a + c - 2\sqrt{ac}$; en divisant par 2, on obtient l'égalité. Si les deux propriétés sont vraies, b) donne $b = \sqrt{ac}$ (car $b > 0$) et $b = \dfrac{a+c}{2}$: la différence est nulle, donc $\sqrt{a} = \sqrt{c}$, $a = c$, puis $b = \sqrt{a^2} = a$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) Avec $A = 1 + t_1 > 0$ et $C = 1 + t_2 > 0$: $1 + t_m = (AC)^{1/2} = \sqrt{AC}$. D'après c), $\sqrt{AC} \leqslant \dfrac{A + C}{2} = 1 + \dfrac{t_1 + t_2}{2}$, d'où $t_m \leqslant \dfrac{t_1 + t_2}{2}$. Application : $CM = 1{,}9 \times 0{,}475 = 0{,}902\,5 = 0{,}95^2$, donc $1 + t_m = \sqrt{0{,}902\,5} = 0{,}95$ et $t_m = -5\,\%$: le cours a baissé (de 9,75 % en tout), alors que la moyenne des deux taux, $\dfrac{90 - 52{,}5}{2} = 18{,}75\,\%$, annonce une hausse. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Piège — La moyenne des taux n'est jamais inférieure au taux moyen, et elle ne lui est égale que si les deux taux sont égaux : après $+90\,\%$ puis $-52{,}5\,\%$, elle annonce $+18{,}75\,\%$, alors que le cours a perdu $5\,\%$ par période en moyenne.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).