Devoir surveillé – Suites et modèles d'évolution — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_3 = 17$ et $u_8 = 39$. Déterminer sa raison et u_0.

b) (v_n) est une suite géométrique à termes strictement positifs telle que $v_2 = 50$ et $v_4 = 84{,}5$. Déterminer sa raison.

c) Calculer $125^{2/3}$.

d) Un indice passe de 125 à 150. Donner l'écart en points et le taux d'évolution.

e) Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $4^x \geqslant 32$.

f) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $7 - 0{,}4n < 0$.

Exercice 2 – Vrai ou faux ? *(4 pts)*

a) « Une grandeur qui augmente de 5 % par an pendant 4 ans augmente au total de 20 %. »

b) « La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n + 1$ est géométrique. »

c) « En base 100 en 2020, l'indice d'une grandeur vaut 80 en 2024. Pour retrouver sa valeur de 2020, elle doit augmenter de 20 %. »

d) « Pour tout réel $x \geqslant 0$, $0{,}9^x \leqslant 1$. »

Exercice 3 – Problème — Deux projections pour une ville nouvelle *(5 pts)*

Une ville nouvelle compte 25 000 habitants. Deux projections sont étudiées : dans la projection A, la population augmente de 1 750 habitants par an ; dans la projection B, elle augmente de 6 % par an. On note a_n et b_n les populations prévues par ces projections dans n années ; ainsi $a_0 = b_0 = 25\,000$. On donne : $1{,}06^6 \approx 1{,}418\,5$ et $1{,}06^7 \approx 1{,}503\,6$.

a) Calculer a_1, a_2, b_1 et b_2. Quelle projection prévoit le plus d'habitants les premières années ?

b) Préciser la nature des suites (a_n) et (b_n), puis exprimer a_n et b_n en fonction de n.

c) Montrer que, dans la projection A, la population augmente de $\dfrac{1\,750}{a_n} \times 100\,\%$ de l'année n à l'année $n+1$. Pour quels entiers n cette hausse est-elle strictement inférieure à 6 % ?

d) À l'aide des valeurs données, montrer que la projection B prévoit moins d'habitants que la projection A au bout de 6 ans, mais davantage au bout de 7 ans.

e) En utilisant la question c), expliquer pourquoi la projection B prévoit ensuite toujours plus d'habitants que la projection A.

Exercice 4 – Problème — Un verre teinté *(4 pts)*

Un fabricant étudie la lumière qui traverse un verre teinté. Pour une épaisseur de x millimètres ($x \geqslant 0$), il modélise la part de lumière transmise, en pourcentage de la lumière reçue, par $T(x) = 100 \times a^{x}$, où a est un réel strictement positif. Une mesure donne $T(1) = 81$. On donne $0{,}9^{8} \approx 0{,}430\,5$ et $0{,}9^{9} \approx 0{,}387\,4$.

a) Déterminer a, puis interpréter ce nombre en pourcentage. Donner le sens de variation de T.

b) Calculer $T(0{,}5)$ et $T(2)$. Entre 1 mm et 2 mm d'épaisseur, de combien de points la part transmise diminue-t-elle, et de quel pourcentage ?

c) Le fabricant vend des verres dont l'épaisseur est un multiple de 0,5 mm. On note $u_n = T(0{,}5n)$ la part transmise par un verre de $0{,}5n$ mm. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

d) Pour une serre, le verre doit transmettre au moins $40\,\%$ de la lumière. Quelle est l'épaisseur maximale possible parmi les verres vendus ?

Exercice 5 – Problème — Des consignes à colis *(4 pts)*

Dans une ville, le nombre de colis retirés dans des consignes automatiques est suivi par un indice, en base 100 en 2018.

Année	2018	2020	2024
Indice (base 100 en 2018)	100	125	180

En 2024, 45 000 colis ont été retirés. On donne $1{,}44^{1/4} \approx 1{,}095\,4$.

a) Combien de colis ont été retirés en 2018 ? Donner le taux d'évolution du nombre de colis entre 2018 et 2024, puis entre 2020 et 2024.

b) Exprimer les indices de 2018, 2020 et 2024 en base 100 en 2020.

c) Calculer le taux d'évolution annuel moyen entre 2020 et 2024, arrondi à $0{,}01\,\%$.

d) On suppose que ce rythme moyen se maintient après 2024. Montrer que le coefficient multiplicateur entre 2024 et 2026 vaut exactement 1,2, puis prévoir le nombre de colis retirés en 2026.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).