Corrigé et barème – Suites et modèles d'évolution — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) $u_8 = u_3 + 5r$, donc $5r = 39 - 17 = 22$ et $r = 4{,}4$. Puis $u_0 = u_3 - 3r = 17 - 13{,}2 = 3{,}8$. (0,5 pt) (0,5)

b) $\dfrac{v_4}{v_2} = q^2$, donc $q^2 = \dfrac{84{,}5}{50} = 1{,}69$. Or $1{,}3^2 = 1{,}69$ et $q > 0$: $q = 1{,}3$. (0,5 pt) (0,5)

c) $125^{1/3} = 5$, car $5^3 = 125$ et $5 > 0$; donc $125^{2/3} = \left(125^{1/3}\right)^2 = 5^2 = 25$. (0,5 pt) (0,5)

d) $150 - 125 = 25$ points ; $\dfrac{150}{125} = 1{,}2$: hausse de 20 % (et non de 25 %). (0,5 pt) (0,5)

e) $4^{2{,}5} = 4^2 \times 4^{0{,}5} = 16 \times 2 = 32$. Comme $4 > 1$, $x \mapsto 4^x$ est croissante : $4^x \geqslant 4^{2{,}5} \iff x \geqslant 2{,}5$. $\mathcal{S} = [2{,}5\,;+\infty[$. (0,5 pt) (0,5)

f) $7 - 0{,}4n < 0 \iff 0{,}4n > 7 \iff n > 17{,}5$: $n = 18$. Vérification : $7 - 0{,}4 \times 17 = 0{,}2 > 0$ et $7 - 0{,}4 \times 18 = -0{,}2 < 0$. (0,5 pt) (0,5)

Astuce — Entre deux termes connus, on fait la différence pour une suite arithmétique ($u_8 - u_3 = 5r$) et le quotient pour une suite géométrique ($\dfrac{v_4}{v_2} = q^2$) : l'écart des rangs donne le nombre de raisons.

Exercice 2 – Vrai ou faux ? *(4 pts)*

a) Faux. Le coefficient global est $1{,}05^4 : 1{,}05^2 = 1{,}102\,5$, puis $1{,}102\,5^2 = 1{,}215\,506\,25$. La hausse est d'environ 21,55 %, plus que 20 % : chaque hausse porte sur une valeur déjà augmentée. (1 pt) (1)

b) Faux. $u_0 = 4$, $u_1 = 7$ et $u_2 = 13$: $\dfrac{u_1}{u_0} = 1{,}75$, mais $1{,}75 \times 7 = 12{,}25 \neq 13$, donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq 1{,}75$. Deux quotients différents suffisent : la suite n'est pas géométrique (c'est le « $+1$ » qui l'en empêche). (1 pt) (1)

c) Faux. Il faut multiplier par $\dfrac{100}{80} = 1{,}25$, soit une hausse de 25 %. Contrôle : $80 \times 1{,}2 = 96 < 100$, une hausse de 20 % ne suffit pas. (1 pt) (1)

d) Vrai. $0 < 0{,}9 < 1$, donc $x \mapsto 0{,}9^x$ est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$: pour tout $x \geqslant 0$, $0{,}9^x \leqslant 0{,}9^0 = 1$. (1 pt) (1)

Piège — Un seul contre-exemple suffit pour prouver qu'une affirmation générale est fausse ; pour prouver qu'elle est vraie, il faut un argument valable dans tous les cas, comme ici le sens de variation.

Exercice 3 – Problème — Deux projections pour une ville nouvelle *(5 pts)*

a) $a_1 = 25\,000 + 1\,750 = 26\,750$ et $a_2 = 28\,500$; $b_1 = 25\,000 \times 1{,}06 = 26\,500$ et $b_2 = 26\,500 \times 1{,}06 = 28\,090$. La projection A prévoit le plus d'habitants au début. (0,5 pt pour les calculs, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

b) On ajoute 1 750 habitants chaque année : (a_n) est arithmétique de raison 1 750, et $a_n = 25\,000 + 1\,750n$. On multiplie par 1,06 chaque année : (b_n) est géométrique de raison 1,06, et $b_n = 25\,000 \times 1{,}06^n$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Le taux d'évolution est $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \dfrac{1\,750}{a_n}$. Comme $a_n > 0$: $\dfrac{1\,750}{a_n} < 0{,}06 \iff 1\,750 < 0{,}06\,a_n \iff 175\,000 < 6\,a_n \iff 175\,000 < 150\,000 + 10\,500n \iff n > \dfrac{25\,000}{10\,500} = \dfrac{50}{21}$. Or $21 \times 2 = 42$ et $21 \times 3 = 63$: la hausse est inférieure à 6 % pour tout $n \geqslant 3$. Contrôle : $\dfrac{1\,750}{28\,500} \approx 6{,}1\,\%$ et $\dfrac{1\,750}{30\,250} \approx 5{,}8\,\%$. (0,5 pt pour le taux, 0,5 pt pour $n \geqslant 3$) (1)

d) $a_6 = 25\,000 + 10\,500 = 35\,500$ et $b_6 \approx 25\,000 \times 1{,}418\,5 = 35\,462{,}5 < a_6$. $a_7 = 37\,250$ et $b_7 \approx 25\,000 \times 1{,}503\,6 = 37\,590 > a_7$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

e) Pour $n \geqslant 7$, supposons $b_n > a_n$. Alors $b_{n+1} = 1{,}06\,b_n > 1{,}06\,a_n$, et d'après c), comme $n \geqslant 3$, $a_{n+1} < 1{,}06\,a_n$ (hausse inférieure à 6 %). Donc $b_{n+1} > a_{n+1}$: de proche en proche, B garde l'avantage, car sa population progresse chaque année d'un pourcentage plus grand que celle de A. (1 pt) (1)

Méthode — Une suite arithmétique ajoute toujours la même quantité, donc un pourcentage de plus en plus faible ; une suite géométrique garde le même pourcentage : c'est pourquoi la croissance exponentielle finit par l'emporter.

Exercice 4 – Problème — Un verre teinté *(4 pts)*

a) $T(1) = 100 \times a = 81$, donc $a = 0{,}81$. Chaque millimètre de verre arrête 19 % de la lumière qui l'atteint ($0{,}81 = 1 - 0{,}19$). Comme $100 > 0$ et $0 < 0{,}81 < 1$, T est strictement décroissante. (0,5 pt pour a et son sens, 0,5 pt pour les variations) (1)

b) $T(0{,}5) = 100 \times 0{,}81^{0{,}5} = 100 \times \sqrt{0{,}81} = 100 \times 0{,}9 = 90$ et $T(2) = 100 \times 0{,}81^2 = 65{,}61$. De 81 à 65,61, la part transmise perd 15,39 points, mais elle baisse de 19 %, car $\dfrac{65{,}61}{81} = 0{,}81$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $u_n = 100 \times 0{,}81^{0{,}5n} = 100 \times \left(0{,}81^{0{,}5}\right)^n = 100 \times 0{,}9^n$: (u_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 100$. Ajouter 0,5 mm multiplie toujours la part transmise par 0,9. (1 pt) (1)

d) $u_n \geqslant 40 \iff 0{,}9^n \geqslant 0{,}4$. Or $0{,}9^8 \approx 0{,}430\,5 \geqslant 0{,}4$ et $0{,}9^9 \approx 0{,}387\,4 < 0{,}4$, et la suite est décroissante : la condition est vérifiée pour $n \leqslant 8$. L'épaisseur maximale est $0{,}5 \times 8 = 4$ mm (environ 43 % de lumière transmise). (1 pt) (1)

Erreur fréquente — « Moins 19 % par millimètre » ne donne pas « moins 9,5 % par demi-millimètre » : sur 0,5 mm, le coefficient est $0{,}81^{0{,}5} = 0{,}9$, soit $-10\,\%$.

Exercice 5 – Problème — Des consignes à colis *(4 pts)*

a) $45\,000 \times \dfrac{100}{180} = 25\,000$ colis en 2018. De 2018 à 2024, l'indice passe de 100 à 180 : hausse de $80\,\%$. De 2020 à 2024 : $\dfrac{180}{125} = 1{,}44$, soit une hausse de $44\,\%$ (et non de $55\,\%$). (0,5 pt pour $25\,000$, 0,5 pt pour les deux taux) (1)

b) On divise par l'indice de 2020 et on multiplie par 100 : 2018 : $\dfrac{100}{125} \times 100 = 80$; 2020 : 100 ; 2024 : $\dfrac{180}{125} \times 100 = 144$. (1 pt) (1)

c) $CM = 1{,}44$ sur $n = 4$ ans : $1 + t_m = 1{,}44^{1/4} \approx 1{,}095\,4$, soit environ $+9{,}54\,\%$ par an. (1 pt) (1)

d) Le coefficient sur 2 ans est $\left(1{,}44^{1/4}\right)^2 = 1{,}44^{2/4} = 1{,}44^{0{,}5} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$. En 2026 : $45\,000 \times 1{,}2 = 54\,000$ colis. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — Pour changer de base, on divise tous les indices par celui de la nouvelle année de référence : les quotients d'indices, donc les taux d'évolution, ne changent pas.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).