Devoir surveillé – Probabilités conditionnelles et indépendance — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) A et B sont deux événements indépendants, avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}42$. Calculer $P(B)$.

b) Résoudre l'équation $(2x - 1)^2 = 9$.

c) Résoudre l'inéquation $x(5 - 2x) \geqslant 0$.

d) On lance deux dés équilibrés à six faces. Sachant que le premier dé donne au moins 4, calculer la probabilité que la somme des deux dés vaille 10.

e) Les points $A(-1\,;4)$, $B(2\,;-2)$ et $C(5\,;-8)$ sont-ils alignés ? Justifier.

f) $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}42$. Calculer $P_{\overline{A}}(B)$.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

Les quatre questions sont indépendantes. Toutes les probabilités qui figurent au dénominateur sont non nulles.

a) Soit A et B deux événements indépendants. En écrivant B comme la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$, montrer que $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$. En déduire, de la même façon, que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

b) On répète deux fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Montrer que la probabilité d'obtenir exactement un succès vaut $2p(1-p)$, puis qu'elle ne dépasse jamais $\dfrac{1}{2}$.

c) Soit A et B deux événements, avec $0 < P(A) < 1$. Montrer que si $P_A(B) > P(B)$, alors $P_{\overline{A}}(B) < P(B)$.

d) Dans un arbre pondéré, $P(A) = a$ avec $0 < a < 1$, $P_A(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$. Montrer que $P(B) = 0{,}6a + 0{,}2$, puis que $P_B(A) \geqslant a$.

Exercice 3 – Problème — Les deux machines d'un atelier *(5 pts)*

Un atelier fabrique des pièces sur deux machines M_1 et M_2. Une proportion x des pièces vient de la machine M_1 (avec $0 < x < 1$), les autres de la machine M_2. $7\,\%$ des pièces de M_1 et $1\,\%$ des pièces de M_2 sont défectueuses. On choisit une pièce au hasard dans la production et on note M_1 : « la pièce vient de M_1 », M_2 : « la pièce vient de M_2 » et D : « la pièce est défectueuse ».

a) Montrer que $P(D) = 0{,}06x + 0{,}01$.

b) Le cahier des charges impose qu'au plus $4\,\%$ des pièces soient défectueuses. Quelles proportions x conviennent ?

c) Pour cibler la maintenance, le responsable souhaite qu'au moins les trois quarts des pièces défectueuses viennent de la machine M_1. Quelles proportions x conviennent ?

d) En déduire les proportions x qui satisfont les deux exigences. Pour $x = 0{,}5$, calculer $P(D)$ et $P_D(M_1)$.

e) Avec $x = 0{,}5$, un client reçoit 4 pièces ; la production est assez grande pour assimiler les choix à 4 épreuves identiques et indépendantes. On donne $0{,}96^3 \approx 0{,}885$ et $0{,}96^4 \approx 0{,}849$. Calculer une valeur approchée de la probabilité que le client reçoive exactement une pièce défectueuse, puis au moins une.

Exercice 4 – Un effectif inconnu *(4 pts)*

Un lycée compte 500 élèves : 200 font du sport en club et 150 jouent d'un instrument de musique. On note x le nombre d'élèves qui font les deux. On choisit un élève au hasard et on note S : « l'élève fait du sport en club » et M : « l'élève joue d'un instrument ».

	M	$\overline{M}$	**Total**
S	x	…	200
$\overline{S}$	…	…	…
Total	150	…	500

a) Recopier et compléter le tableau en fonction de x, puis déterminer toutes les valeurs possibles de x.

b) Déterminer x pour que les événements S et M soient indépendants.

c) Un élève affirme : « Savoir qu'un élève fait du sport en club augmente la probabilité qu'il joue d'un instrument. » Pour quelles valeurs de x a-t-il raison ?

d) Déterminer x pour que la moitié des élèves qui ne jouent pas d'un instrument ne fassent pas non plus de sport en club. Les événements S et M sont-ils alors indépendants ?

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Deux manches gagnantes *(4 pts)*

Lucas et Malik jouent au tennis de table. Lucas gagne chaque manche avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$), indépendamment des autres manches. Ils disputent un match en deux manches gagnantes. Pour simplifier, on suppose qu'ils jouent toujours trois manches, la troisième ne changeant le résultat que si chacun a gagné une des deux premières : Lucas gagne le match s'il gagne au moins deux manches sur trois.

a) Montrer que la probabilité que Lucas gagne le match vaut $G(p) = 3p^2 - 2p^3$.

b) Calculer $G(0{,}6)$ et le comparer à $0{,}6$. Interpréter.

c) Montrer que, pour tout réel p, $G(p) - p = p(2p - 1)(1 - p)$.

d) Dresser le tableau de signes de $p(2p-1)(1-p)$ sur $]0\,;1[$. Dans quels cas Lucas a-t-il intérêt à jouer un match en deux manches gagnantes plutôt qu'une seule manche ?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).