Corrigé et barème – Probabilités conditionnelles et indépendance — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) A et B indépendants, donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi : $0{,}7 \times P(\overline{B}) = 0{,}42$, d'où $P(\overline{B}) = 0{,}6$ et $P(B) = 0{,}4$. (0,5 pt) (0,5)

b) $2x - 1 = 3$ ou $2x - 1 = -3$, soit $x = 2$ ou $x = -1$. $\mathcal{S} = \{-1\,;2\}$. (0,5 pt) (0,5)

c) Les facteurs s'annulent en 0 et en 2,5 ; x est positif après 0 et $5 - 2x$ est positif avant 2,5, donc le produit est positif entre 0 et 2,5 et négatif ailleurs (forme $-2x(x-2{,}5)$, avec $-2 < 0$). Inégalité large : $\mathcal{S} = [0\,;2{,}5]$. (0,5 pt) (0,5)

d) Sachant que le premier dé donne 4, 5 ou 6, il reste $3 \times 6 = 18$ issues équiprobables, dont 3 de somme 10 : $(4\,;6)$, $(5\,;5)$, $(6\,;4)$. La probabilité vaut $\dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6}$. (0,5 pt) (0,5)

e) $m_{AB} = \dfrac{-2-4}{2-(-1)} = \dfrac{-6}{3} = -2$ et $m_{AC} = \dfrac{-8-4}{5-(-1)} = \dfrac{-12}{6} = -2$: les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur et le point A en commun, elles sont confondues ; les trois points sont alignés. (0,5 pt) (0,5)

f) $P(B) = 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times P_{\overline{A}}(B)$, d'où $0{,}3 + 0{,}4\,P_{\overline{A}}(B) = 0{,}42$, $0{,}4\,P_{\overline{A}}(B) = 0{,}12$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}3$. (0,5 pt) (0,5)

Astuce — Les contraires de deux événements indépendants sont encore indépendants : on peut multiplier directement $P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$, ou retrouver $P(\overline{B})$ par une division.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

a) $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$, donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)\big(1 - P(A)\big) = P(\overline{A}) \times P(B)$: $\overline{A}$ et B sont indépendants. De même, $P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$, donc $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A})P(B) = P(\overline{A})\big(1 - P(B)\big) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) Deux chemins (succès puis échec, échec puis succès), chacun de probabilité $p(1-p)$: la probabilité vaut $2p(1-p)$. Puis $\dfrac{1}{2} - 2p(1-p) = 2p^2 - 2p + \dfrac{1}{2} = 2\left(p^2 - p + \dfrac{1}{4}\right) = 2\left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$: la probabilité ne dépasse pas $\dfrac{1}{2}$, et vaut $\dfrac{1}{2}$ seulement pour $p = \dfrac{1}{2}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) On note $a = P(A)$. Par la somme des chemins, $P(B) = a\,P_A(B) + (1-a)\,P_{\overline{A}}(B)$, donc $(1-a)\,P_{\overline{A}}(B) = P(B) - a\,P_A(B)$. Comme $a > 0$ et $P_A(B) > P(B)$, on a $a\,P_A(B) > a\,P(B)$, d'où $(1-a)\,P_{\overline{A}}(B) < P(B) - a\,P(B) = (1-a)\,P(B)$. On divise par $1 - a > 0$, le sens est conservé : $P_{\overline{A}}(B) < P(B)$. (1 pt) (1)

d) $P(B) = 0{,}8a + 0{,}2(1-a) = 0{,}6a + 0{,}2$, qui est strictement positif. $P_B(A) = \dfrac{0{,}8a}{0{,}6a + 0{,}2}$, et, en multipliant par $0{,}6a + 0{,}2 > 0$: $P_B(A) \geqslant a \iff 0{,}8a \geqslant 0{,}6a^2 + 0{,}2a \iff 0{,}6a - 0{,}6a^2 \geqslant 0 \iff 0{,}6a(1-a) \geqslant 0$, ce qui est vrai car $a > 0$ et $1 - a > 0$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — Pour comparer deux expressions, on étudie le signe de leur différence, que l'on factorise : un carré est toujours positif, et un produit de facteurs positifs aussi.

Exercice 3 – Problème — Les deux machines d'un atelier *(5 pts)*

a) $P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) = 0{,}07x + 0{,}01(1-x) = 0{,}07x + 0{,}01 - 0{,}01x = 0{,}06x + 0{,}01$. (1 pt) (1)

b) $0{,}06x + 0{,}01 \leqslant 0{,}04 \iff 0{,}06x \leqslant 0{,}03 \iff x \leqslant 0{,}5$ (division par $0{,}06 > 0$). La machine M_1 doit fabriquer au plus la moitié des pièces : $0 < x \leqslant 0{,}5$. (1 pt) (1)

c) $P_D(M_1) = \dfrac{0{,}07x}{0{,}06x + 0{,}01}$. Le dénominateur est strictement positif, donc $P_D(M_1) \geqslant 0{,}75 \iff 0{,}07x \geqslant 0{,}75(0{,}06x + 0{,}01) \iff 0{,}07x \geqslant 0{,}045x + 0{,}007\,5 \iff 0{,}025x \geqslant 0{,}007\,5 \iff x \geqslant \dfrac{0{,}007\,5}{0{,}025} = 0{,}3$. (0,5 pt pour l'expression de $P_D(M_1)$, 0,5 pt pour $x \geqslant 0{,}3$) (1)

d) Les deux exigences donnent $0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}5$. Pour $x = 0{,}5$: $P(D) = 0{,}03 + 0{,}01 = 0{,}04$ et $P_D(M_1) = \dfrac{0{,}07 \times 0{,}5}{0{,}04} = \dfrac{0{,}035}{0{,}04} = \dfrac{7}{8} = 0{,}875$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

e) Chaque pièce est défectueuse avec la probabilité 0,04. Exactement une : 4 chemins, chacun de probabilité $0{,}04 \times 0{,}96^3$, d'où $4 \times 0{,}04 \times 0{,}96^3 \approx 0{,}16 \times 0{,}885 \approx 0{,}142$. Au moins une : contraire de « aucune », $1 - 0{,}96^4 \approx 1 - 0{,}849 = 0{,}151$. Presque toutes les commandes touchées ne contiennent qu'une pièce défectueuse. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Piège — Pour comparer un quotient à 0,75, on multiplie par le dénominateur après avoir vérifié qu'il est strictement positif ; sinon, le sens de l'inégalité pourrait changer.

Exercice 4 – Un effectif inconnu *(4 pts)*

a) $S \cap \overline{M}$: $200 - x$; $\overline{S}$: $500 - 200 = 300$; $\overline{S} \cap M$: $150 - x$; $\overline{S} \cap \overline{M}$: $300 - (150 - x) = 150 + x$; $\overline{M}$: $500 - 150 = 350$, et l'on contrôle que $(200 - x) + (150 + x) = 350$. Chaque case est un effectif positif ou nul : $x \geqslant 0$, $200 - x \geqslant 0$ et $150 - x \geqslant 0$, donc x est un entier de 0 à 150. (0,5 pt pour le tableau, 0,5 pt pour les valeurs possibles) (1)

b) $P(S) = \dfrac{200}{500} = 0{,}4$, $P(M) = \dfrac{150}{500} = 0{,}3$ et $P(S \cap M) = \dfrac{x}{500}$. Indépendance : $\dfrac{x}{500} = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12 \iff x = 60$. (1 pt) (1)

c) Il a raison si $P_S(M) > P(M)$, soit $\dfrac{x}{200} > 0{,}3 \iff x > 60$. Avec a) : pour x entier de 61 à 150. (1 pt) (1)

d) $P_{\overline{M}}(\overline{S}) = \dfrac{150 + x}{350} = 0{,}5 \iff 150 + x = 175 \iff x = 25$. Comme $25 \neq 60$, S et M ne sont pas indépendants (b) ; ici $P_S(M) = \dfrac{25}{200} = 0{,}125 < 0{,}3$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — Avec un effectif inconnu, on remplit d'abord tout le tableau en fonction de x, puis on écrit que chaque case est positive : cela donne les valeurs possibles de x avant tout calcul de probabilité.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Deux manches gagnantes *(4 pts)*

a) Lucas gagne s'il remporte 3 manches (un chemin, p^3) ou exactement 2 manches (3 chemins selon la manche perdue, chacun de probabilité $p^2(1-p)$). $G(p) = p^3 + 3p^2(1-p) = p^3 + 3p^2 - 3p^3 = 3p^2 - 2p^3$. (0,5 pt pour les chemins, 0,5 pt pour le calcul) (1)

b) $G(0{,}6) = 3 \times 0{,}36 - 2 \times 0{,}216 = 1{,}08 - 0{,}432 = 0{,}648$, et $0{,}648 > 0{,}6$: un joueur qui gagne 60 % des manches gagne près de 65 % des matchs. (1 pt) (1)

c) $(2p-1)(1-p) = 2p - 2p^2 - 1 + p = -2p^2 + 3p - 1$, donc $p(2p-1)(1-p) = -2p^3 + 3p^2 - p = G(p) - p$. (1 pt) (1)

d) Sur $]0\,;1[$, $p > 0$ et $1-p > 0$; $2p-1$ s'annule en $\dfrac{1}{2}$, négatif avant et positif après. Le produit a le signe de $2p-1$:

p	0		$\frac{1}{2}$		1
p	0	$+$		$+$	
$2p-1$		$-$	0	$+$	
$1-p$		$+$		$+$	0
$G(p)-p$		$-$	0	$+$	

Si $p > \dfrac{1}{2}$, $G(p) > p$: le match en deux manches gagnantes avantage Lucas. Si $p < \dfrac{1}{2}$, il a intérêt à ne jouer qu'une manche ; pour $p = \dfrac{1}{2}$, les deux formules se valent. Plus le match est long, plus le meilleur joueur est favorisé. (0,5 pt pour le tableau, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Erreur fréquente — « Gagner exactement deux manches sur trois » correspond à trois chemins : oublier le facteur 3 dans $3p^2(1-p)$ donne une probabilité trop petite, et $G(0{,}5)$ ne vaudrait plus 0,5.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).