Devoir surveillé – Probabilités conditionnelles et indépendance — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 30 (inclus). Calculer la probabilité qu'il soit un multiple de 4 ou de 6.

b) A et B sont deux événements indépendants, avec $P(A) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}4$. Calculer la probabilité qu'aucun des deux ne soit réalisé.

c) Résoudre l'inéquation $-2x + 7 < 3x - 8$.

d) Résoudre l'équation $\dfrac{18}{x} = 4$.

e) Résoudre l'inéquation $-3(x + 2)(x - 5) > 0$.

f) Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(-2\,;5)$ et a pour coefficient directeur $-1{,}5$.

Exercice 2 – Vrai ou faux ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

a) « Si $P(A) = 0{,}4$ et $P_A(B) = 0{,}5$, alors $P(B) = 0{,}2$. »

b) « On lance deux fois une pièce qui tombe sur Pile avec la probabilité p, les lancers étant indépendants. La probabilité d'obtenir au moins une fois Pile vaut $2p$. »

c) « Si A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}6$, alors $P_B(A) = 0{,}3$. »

d) « L'inéquation $(x - 2)(x + 3) < 0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty\,;-3[\cup]2\,;+\infty[$. »

Exercice 3 – Problème — Le filtre à spams *(5 pts)*

Un logiciel de messagerie trie les courriels reçus. Il place dans le dossier Indésirables 96 % des spams et 2 % des courriels qui ne sont pas des spams. On choisit un courriel reçu au hasard et on note S : « le courriel est un spam » et I : « le courriel est placé dans le dossier Indésirables ».

a) Dans cette question et les deux suivantes, 40 % des courriels reçus sont des spams. Représenter la situation par un arbre pondéré, puis calculer $P(S \cap I)$, $P(\overline{S} \cap I)$ et $P(I)$.

b) Un courriel se trouve dans le dossier Indésirables. Calculer, sous forme de fraction irréductible, la probabilité que ce ne soit pas un spam, puis montrer qu'elle est inférieure à 4 %.

c) Les événements S et I sont-ils indépendants ? Que pourrait-on dire d'un filtre pour lequel ils le seraient ?

d) On note maintenant s la proportion de spams parmi les courriels reçus, avec $0 \leqslant s \leqslant 1$. Montrer que $P(I) = 0{,}94s + 0{,}02$, puis interpréter le nombre $0{,}02$.

e) Sur la messagerie de Léa, le filtre place 49 % des courriels dans le dossier Indésirables. Estimer la proportion de spams parmi les courriels qu'elle reçoit.

Exercice 4 – Un sac de jetons *(4 pts)*

Un sac contient 5 jetons rouges et n jetons verts (n entier, $n \geqslant 1$), indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard, on note sa couleur, on le remet dans le sac, puis on tire un second jeton.

a) Dans cette question, $n = 5$. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons rouges, puis celle d'obtenir deux jetons de la même couleur.

b) Toujours avec $n = 5$, on tire maintenant les deux jetons sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons rouges et la comparer à celle de a).

c) On revient au tirage avec remise, n étant inconnu, et l'on note $q = \dfrac{5}{n+5}$ la probabilité de tirer un jeton rouge. Exprimer en fonction de q la probabilité d'obtenir deux jetons rouges, puis déterminer n pour que cette probabilité vaille $\dfrac{1}{9}$.

d) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la probabilité d'obtenir au moins un jeton rouge est supérieure ou égale à $0{,}75$.

Exercice 5 – Problème — Des trajets en covoiturage *(4 pts)*

Une plateforme de covoiturage modélise la probabilité qu'un trajet Lyon–Grenoble soit complet (toutes les places réservées) par une fonction f de l'heure de départ x, en heures, avec $x \in [6\,;22]$. Voici le tableau de variations de f.

x	6		8		13		18		22
$f(x)$	0,2	↗	0,9	↘	0,3	↗	0,8	↘	0,1

a) Donner la probabilité qu'un trajet au départ de 13 h soit complet, l'heure de départ pour laquelle cette probabilité est la plus grande, puis un encadrement de $f(x)$ pour x dans $[6\,;22]$.

b) Combien d'heures de départ donnent une probabilité d'être complet égale à 0,5 ? Justifier à l'aide du tableau.

c) Karim publie chaque jour un trajet Lyon–Grenoble : au départ de 8 h avec la probabilité 0,6, au départ de 13 h sinon. On note H : « le trajet part à 8 h » et C : « le trajet est complet ». Construire un arbre pondéré et montrer que $P(C) = 0{,}66$.

d) Un jour, le trajet de Karim est complet. Calculer la probabilité qu'il soit parti à 8 h, sous forme de fraction irréductible.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).