Corrigé et barème – Probabilités conditionnelles et indépendance — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Multiples de 4 : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 ; multiples de 6 : 6, 12, 18, 24, 30. Sans compter deux fois 12 et 24, cela fait 10 nombres sur 30 équiprobables : $\dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$. (0,5 pt) (0,5)

b) A et B indépendants, donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$. (0,5 pt) (0,5)

c) $-2x - 3x < -8 - 7$, soit $-5x < -15$; on divise par -5, négatif, donc le sens change : $x > 3$. $\mathcal{S} =]3\,;+\infty[$. (0,5 pt) (0,5)

d) Pour $x \neq 0$: $18 = 4x$, donc $x = \dfrac{18}{4} = 4{,}5$. Contrôle : $\dfrac{18}{4{,}5} = 4$. (0,5 pt) (0,5)

e) Racines -2 et 5, coefficient $-3 < 0$: l'expression est négative à l'extérieur des racines et positive entre elles. $\mathcal{S} =]-2\,;5[$. Contrôle avec $x = 0$: $-3 \times 2 \times (-5) = 30 > 0$. (0,5 pt) (0,5)

f) $p = y_A - m\,x_A = 5 - (-1{,}5) \times (-2) = 5 - 3 = 2$: la droite a pour équation $y = -1{,}5x + 2$. Contrôle : $-1{,}5 \times (-2) + 2 = 5$. (0,5 pt) (0,5)

Astuce — Pour le signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$, pas besoin d'une ligne par facteur : signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre elles, et l'on contrôle avec une valeur simple comme $x = 0$.

Exercice 2 – Vrai ou faux ? *(4 pts)*

a) Faux. $0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$ est $P(A \cap B)$, et non $P(B)$. D'après l'arbre, $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2 + 0{,}6 \times P_{\overline{A}}(B)$; par exemple, si $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$, alors $P(B) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$. (1 pt) (1)

b) Faux. Le contraire « aucun Pile » a pour probabilité $(1-p)^2$, donc la bonne probabilité est $1 - (1-p)^2 = 2p - p^2$. Contre-exemple : pour $p = 0{,}8$, $2p = 1{,}6 > 1$ ne peut pas être une probabilité, alors que $1 - 0{,}2^2 = 0{,}96$. (1 pt) (1)

c) Vrai. Par indépendance, $P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$, donc $P_B(A) = \dfrac{0{,}18}{0{,}6} = 0{,}3 = P(A)$: savoir que B est réalisé ne change pas la probabilité de A. (1 pt) (1)

d) Faux. Forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a = 1 > 0$: le produit est positif à l'extérieur des racines -3 et 2, et négatif entre elles. L'ensemble des solutions est $]-3\,;2[$. Contre-exemple : $x = 0$ donne $(-2) \times 3 = -6 < 0$, donc 0 est solution, alors qu'il n'appartient pas à l'ensemble proposé. (1 pt) (1)

Piège — Une « probabilité » plus grande que 1, comme $2p = 1{,}6$, suffit à prouver qu'une formule est fausse : c'est le contre-exemple le plus rapide à trouver.

Exercice 3 – Problème — Le filtre à spams *(5 pts)*

a) Premier niveau : $P(S) = 0{,}4$, $P(\overline{S}) = 0{,}6$; second niveau : $P_S(I) = 0{,}96$, $P_S(\overline{I}) = 0{,}04$, $P_{\overline{S}}(I) = 0{,}02$, $P_{\overline{S}}(\overline{I}) = 0{,}98$. $P(S \cap I) = 0{,}4 \times 0{,}96 = 0{,}384$ et $P(\overline{S} \cap I) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$, donc $P(I) = 0{,}384 + 0{,}012 = 0{,}396$. (0,5 pt pour l'arbre et les deux produits, 0,5 pt pour $P(I)$) (1)

b) $P_I(\overline{S}) = \dfrac{0{,}012}{0{,}396} = \dfrac{12}{396} = \dfrac{1}{33}$. Comme $0{,}04 \times 33 = 1{,}32 > 1$, on a $\dfrac{1}{33} < 0{,}04$: moins de 4 % des courriels écartés sont de vrais courriels. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $P(S) \times P(I) = 0{,}4 \times 0{,}396 = 0{,}158\,4$, alors que $P(S \cap I) = 0{,}384$: S et I ne sont pas indépendants. Si le filtre rendait S et I indépendants, on aurait $P_S(I) = P_{\overline{S}}(I) = P(I)$: il écarterait spams et vrais courriels dans la même proportion, il ne servirait à rien. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $P(I) = 0{,}96s + 0{,}02(1 - s) = 0{,}96s + 0{,}02 - 0{,}02s = 0{,}94s + 0{,}02$. Pour $s = 0$ (aucun spam), $P(I) = 0{,}02$: même sans spam, 2 % des courriels finiraient dans le dossier Indésirables. Contrôle : pour $s = 0{,}4$, $0{,}376 + 0{,}02 = 0{,}396$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

e) On résout $0{,}94s + 0{,}02 = 0{,}49$: $0{,}94s = 0{,}47$, donc $s = \dfrac{0{,}47}{0{,}94} = 0{,}5$. Environ la moitié des courriels reçus par Léa sont des spams. (1 pt) (1)

Méthode — Quand on observe un résultat (ici 49 % de courriels écartés) et qu'on cherche sa cause (la proportion de spams), on exprime le résultat en fonction de la cause, puis on résout une équation du premier degré.

Exercice 4 – Un sac de jetons *(4 pts)*

a) Avec remise, chaque tirage donne un jeton rouge avec la probabilité $\dfrac{5}{10} = 0{,}5$ et un vert avec 0,5, et les deux tirages sont indépendants. Deux rouges : $0{,}5^2 = 0{,}25$. Même couleur : deux rouges ou deux verts, $0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) Sans remise, après un jeton rouge, il reste 4 rouges sur 9 jetons : $\dfrac{5}{10} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{20}{90} = \dfrac{2}{9}$. Or $\dfrac{2}{9} < \dfrac{2}{8} = 0{,}25$: la probabilité est plus faible sans remise, car le sac a perdu un jeton rouge. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Les tirages sont indépendants : $P = q \times q = q^2$. $q^2 = \dfrac{1}{9}$ a deux solutions, $\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{3}$; or $q > 0$, donc $q = \dfrac{1}{3}$. Alors $\dfrac{5}{n+5} = \dfrac{1}{3} \iff n + 5 = 15 \iff n = 10$. (0,5 pt pour $q = \dfrac{1}{3}$, 0,5 pt pour $n = 10$) (1)

d) « Au moins un rouge » est le contraire de « deux verts », de probabilité $(1 - q)^2$. On veut $1 - (1 - q)^2 \geqslant 0{,}75$, soit $(1 - q)^2 \leqslant 0{,}25$. Comme $0 < 1 - q < 1$, cela équivaut à $1 - q \leqslant 0{,}5$, soit $q \geqslant 0{,}5$, c'est-à-dire $\dfrac{5}{n+5} \geqslant \dfrac{1}{2} \iff 10 \geqslant n + 5 \iff n \leqslant 5$. Donc $n \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$. Contrôle : pour $n = 5$, $1 - 0{,}5^2 = 0{,}75$; pour $n = 6$, $1 - \left(\dfrac{6}{11}\right)^2 = \dfrac{85}{121} < 0{,}75$. (1 pt) (1)

Astuce — Poser q, la probabilité d'un jeton rouge, ramène tout à un seul nombre : q^2 pour deux rouges, $1 - (1 - q)^2$ pour au moins un rouge ; on ne revient à n qu'à la toute fin.

Exercice 5 – Problème — Des trajets en covoiturage *(4 pts)*

a) $f(13) = 0{,}3$. La probabilité est la plus grande pour un départ à 8 h : elle vaut alors $f(8) = 0{,}9$. Le minimum est $0{,}1$ (en 22) et le maximum $0{,}9$ (en 8), donc $0{,}1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}9$ pour tout x de $[6\,;22]$. (1 pt) (1)

b) $0{,}5$ est compris entre $0{,}2$ et $0{,}9$ (une heure sur $[6\,;8]$), entre $0{,}9$ et $0{,}3$ (une sur $[8\,;13]$), entre $0{,}3$ et $0{,}8$ (une sur $[13\,;18]$) et entre $0{,}8$ et $0{,}1$ (une sur $[18\,;22]$) : sur chaque intervalle, f est strictement monotone, donc l'équation $f(x) = 0{,}5$ a exactement 4 solutions. (1 pt) (1)

c) Premier niveau : $P(H) = 0{,}6$ et $P(\overline{H}) = 0{,}4$. Second niveau : $P_H(C) = f(8) = 0{,}9$, $P_H(\overline{C}) = 0{,}1$; $P_{\overline{H}}(C) = f(13) = 0{,}3$, $P_{\overline{H}}(\overline{C}) = 0{,}7$. $P(C) = 0{,}6 \times 0{,}9 + 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}54 + 0{,}12 = 0{,}66$. (0,5 pt pour l'arbre, 0,5 pt pour $P(C)$) (1)

d) $P_C(H) = \dfrac{P(H \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}54}{0{,}66} = \dfrac{54}{66} = \dfrac{9}{11}$. Un trajet complet de Karim est parti à 8 h dans environ $82\,\%$ des cas. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Dans un tableau de variations, la première ligne donne l'heure et la seconde la probabilité : on lit les probabilités dans la seconde ligne pour remplir l'arbre, et l'on compte les solutions de $f(x) = 0{,}5$ flèche par flèche.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).