Corrigé et barème – Probabilités conditionnelles et indépendance — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Exercice 1 – Automatismes *(6 pts)*

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}37 = 0{,}63$. (1 pt) (1)

b) On retire $2x$ et on ajoute 7 aux deux membres : $4x = 18$, donc $x = \dfrac{18}{4} = 4{,}5$. Contrôle : $6 \times 4{,}5 - 7 = 27 - 7 = 20$ et $2 \times 4{,}5 + 11 = 9 + 11 = 20$. (1 pt) (1)

c) Probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}6 \times 0{,}35 = 0{,}21$. (1 pt) (1)

d) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x - 4 = 0$ ou $3x + 6 = 0$, soit $x = 4$ ou $x = -2$. $\mathcal{S} = \{-2\,;4\}$. (0,5 pt par solution) (1)

e) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{9 - (-1)}{6 - 2} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$. (1 pt) (1)

f) À chaque lancer, 3 faces sur 6 sont paires : la probabilité vaut $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Les lancers sont indépendants, donc on multiplie : $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. (1 pt) (1)

Méthode — Avant de calculer, on repère la forme : un produit nul se résout facteur par facteur, sans développer, et « sachant », « parmi » ou « chez les » signalent une probabilité conditionnelle, qui se multiplie le long d'une branche.

Exercice 2 – Problème — Les adhérents d'une salle d'escalade *(5 pts)*

a) Moins de 18 ans : $0{,}25 \times 360 = 90$, dont $0{,}4 \times 90 = 36$ en cours encadrés et $90 - 36 = 54$ en accès libre. 18 ans et plus : $360 - 90 = 270$, dont 108 en cours encadrés et $270 - 108 = 162$ en accès libre. Totaux : $36 + 108 = 144$ en cours encadrés, $54 + 162 = 216$ en accès libre, et l'on contrôle que $144 + 216 = 360$.

	Cours encadrés	**Accès libre**	**Total**
Moins de 18 ans	36	54	90
18 ans et plus	108	162	270
Total	144	216	360

(1 pt : 0,5 pt pour la ligne des moins de 18 ans, 0,5 pt pour le reste) (1)

b) $P(J \cap C) = \dfrac{36}{360} = 0{,}1$ et $P(C) = \dfrac{144}{360} = 0{,}4$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Non. Parmi les 144 adhérents en cours encadrés, 36 ont moins de 18 ans : $P_C(J) = \dfrac{36}{144} = 0{,}25$, soit 25 %. Le nombre 40 % est $P_J(C)$, la part des cours encadrés parmi les moins de 18 ans : le moniteur a inversé la condition. (0,5 pt pour 0,25, 0,5 pt pour l'explication) (1)

d) $P(J) = \dfrac{90}{360} = 0{,}25$, donc $P(J) \times P(C) = 0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}1 = P(J \cap C)$: les événements J et C sont indépendants. On le voit aussi avec c) : $P_C(J) = 0{,}25 = P(J)$, la part des moins de 18 ans est la même dans les cours encadrés que dans toute la salle. (1 pt) (1)

e) Les moins de 18 ans sont alors $90 + x$, dont $36 + x$ en cours encadrés ; « la moitié au moins » s'écrit $36 + x \geqslant 0{,}5(90 + x)$. Puis $36 + x \geqslant 45 + 0{,}5x \iff 0{,}5x \geqslant 9 \iff x \geqslant 18$: il faut au moins 18 nouveaux adhérents. Contrôle : $\dfrac{54}{108} = 0{,}5$. (0,5 pt pour l'inéquation expliquée, 0,5 pt pour $x \geqslant 18$) (1)

Piège — $P_J(C) = 40\,\%$ et $P_C(J) = 25\,\%$ ont le même numérateur 36 mais pas la même condition : on divise par le total de la ligne des moins de 18 ans pour l'une, par celui de la colonne des cours encadrés pour l'autre.

Exercice 3 – Problème — Des colis en retard *(5 pts)*

a) Premier niveau : $P(R) = 0{,}3$ et $P(\overline{R}) = 0{,}7$. Second niveau : $P_R(L) = 0{,}1$ et $P_R(\overline{L}) = 0{,}9$; $P_{\overline{R}}(L) = 0{,}04$ et $P_{\overline{R}}(\overline{L}) = 0{,}96$. Chaque nœud fait bien 1. (1 pt) (1)

b) $P(R \cap L) = 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}03$. Deux chemins mènent à L : $P(\overline{R} \cap L) = 0{,}7 \times 0{,}04 = 0{,}028$, donc $P(L) = 0{,}03 + 0{,}028 = 0{,}058$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $P_L(R) = \dfrac{P(R \cap L)}{P(L)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}058} = \dfrac{30}{58} = \dfrac{15}{29}$. Comme $2 \times 15 = 30 > 29$, $\dfrac{15}{29} > \dfrac{1}{2}$, donc $P_L(R) > P(R) = 0{,}3$: les points relais reçoivent 30 % des colis, mais plus de la moitié des colis en retard. (0,5 pt pour la fraction, 0,5 pt pour la comparaison) (1)

d) $P(L) = P(R \cap L) + P(\overline{R} \cap L) = 0{,}1x + 0{,}04(1 - x) = 0{,}1x + 0{,}04 - 0{,}04x = 0{,}06x + 0{,}04$. C'est une fonction affine de coefficient directeur $0{,}06 > 0$: elle est croissante. Plus la part des points relais est grande, plus la probabilité de retard est grande. Contrôle : pour $x = 0{,}3$, $0{,}018 + 0{,}04 = 0{,}058$, comme en b). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

e) $0{,}06x + 0{,}04 \leqslant 0{,}07 \iff 0{,}06x \leqslant 0{,}03 \iff x \leqslant \dfrac{0{,}03}{0{,}06} = 0{,}5$ (on divise par 0,06, positif : le sens ne change pas). L'enseigne peut livrer jusqu'à la moitié de ses colis en point relais : $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$. (1 pt) (1)

Astuce — Avec une proportion inconnue x, on remplit l'arbre exactement comme avec un nombre : la somme des chemins donne une expression affine en x, et la valeur trouvée en b) sert de contrôle pour $x = 0{,}3$.

Exercice 4 – Problème — Deux lancers francs *(4 pts)*

a) Arbre à deux niveaux ($2^2 = 4$ chemins) : à chaque lancer, la branche « réussi » porte 0,9 et la branche « manqué » porte 0,1. Un seul chemin pour deux lancers réussis : $0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$. (0,5 pt pour l'arbre, 0,5 pt pour 0,81) (1)

b) Deux chemins (réussi puis manqué, manqué puis réussi), chacun de probabilité $0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}09$: $2 \times 0{,}09 = 0{,}18$. (1 pt) (1)

c) C'est le contraire de « aucun lancer réussi », de probabilité $0{,}1^2 = 0{,}01$: $1 - 0{,}01 = 0{,}99$. Contrôle : $0{,}81 + 0{,}18 + 0{,}01 = 1$. (1 pt) (1)

d) Les lancers sont indépendants, donc $p \times p = 0{,}36$, soit $p^2 = 0{,}36$. Cette équation a deux solutions, $0{,}6$ et $-0{,}6$; une probabilité n'est jamais négative, donc $p = 0{,}6$. (0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour la solution justifiée) (1)

Erreur fréquente — « Au moins un lancer réussi » ne vaut pas $0{,}9 + 0{,}9 = 1{,}8$, qui dépasse 1 : on passe par le contraire « aucun lancer réussi », qui ne correspond qu'à un seul chemin.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).