Corrigé et barème – Information chiffrée et statistique à deux caractères — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths sans spécialité 1re

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) $1{,}1 \times 0{,}9 \times 1{,}1 = 0{,}99 \times 1{,}1 = 1{,}089$: hausse globale de $8{,}9\,\%$. (0,5 pt) (0,5)

b) $\dfrac{140}{0{,}025} = \dfrac{140\,000}{25} = 5\,600$ personnes. Contrôle : $1\,\%$ de $5\,600$ vaut 56, et $2{,}5 \times 56 = 140$. (0,5 pt) (0,5)

c) Coefficient : $0{,}48$; coefficient réciproque : $\dfrac{1}{0{,}48} = \dfrac{100}{48} = \dfrac{25}{12}$. Taux : $\dfrac{25}{12} - 1 = \dfrac{13}{12} \approx 1{,}083$, soit une hausse d'environ $108{,}3\,\%$. (0,5 pt) (0,5)

d) Centres des classes : 5, 15 et 30 (la dernière classe a pour amplitude 20). $\dfrac{12 \times 5 + 20 \times 15 + 8 \times 30}{40} = \dfrac{60 + 300 + 240}{40} = \dfrac{600}{40} = 15$: environ 15 min. (0,5 pt) (0,5)

e) Le secteur représente $\dfrac{99}{360}$ de l'effectif : $\dfrac{99}{360} \times 480 = \dfrac{99 \times 4}{3} = 132$ personnes. (0,5 pt) (0,5)

f) Cette droite passe par G et par A. Coefficient directeur : $\dfrac{30 - 50}{12 - 4} = \dfrac{-20}{8} = -2{,}5$; ordonnée à l'origine : $50 - (-2{,}5) \times 4 = 50 + 10 = 60$. Équation : $y = -2{,}5x + 60$; contrôle : $-2{,}5 \times 12 + 60 = 30$. (0,5 pt) (0,5)

Erreur fréquente — Pour une série en classes, on remplace chaque classe par son centre, même quand les classes n'ont pas la même amplitude : le centre de $[20\,;40[$ est 30, pas 25.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

a) Le coefficient global est le produit des coefficients : $(1+t_1)(1+t_2) = 1 + t_1 + t_2 + t_1t_2$, donc le taux global vaut $(1 + t_1 + t_2 + t_1t_2) - 1 = t_1 + t_2 + t_1t_2$. Il est strictement inférieur à $t_1 + t_2$ si et seulement si $t_1t_2 < 0$, c'est-à-dire si t_1 et t_2 sont de signes contraires : une hausse et une baisse. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) Le coefficient de la hausse est $1 + t$, celui de l'évolution réciproque $\dfrac{1}{1+t}$, donc son taux vaut $\dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{1 - (1+t)}{1+t} = -\dfrac{t}{1+t}$: c'est une baisse de taux $\dfrac{t}{1+t}$. Puis $t - \dfrac{t}{1+t} = \dfrac{t(1+t) - t}{1+t} = \dfrac{t^2}{1+t} > 0$ car $t > 0$: la baisse est strictement plus faible que la hausse. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) L'effectif concerné vaut $n_1p_1 + n_2p_2$, donc $p = \dfrac{n_1p_1 + n_2p_2}{n_1 + n_2}$. Alors $p - p_1 = \dfrac{n_1p_1 + n_2p_2 - (n_1+n_2)p_1}{n_1+n_2} = \dfrac{n_2(p_2 - p_1)}{n_1 + n_2} \geqslant 0$ et, de même, $p_2 - p = \dfrac{n_1(p_2 - p_1)}{n_1+n_2} \geqslant 0$. Si $n_1 = n_2 = n$: $p = \dfrac{n(p_1+p_2)}{2n} = \dfrac{p_1+p_2}{2}$. (0,5 pt pour l'encadrement, 0,5 pt pour le cas $n_1 = n_2$) (1)

d) Notons $G(\overline{x}\,;\overline{y})$. La somme des abscisses du premier groupe vaut n_1x_1 et celle du second n_2x_2, donc $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2}{n_1+n_2}$; de même, $\overline{y} = \dfrac{n_1y_1 + n_2y_2}{n_1+n_2}$. Par le même calcul qu'en c) : $\overline{x} - x_1 = \dfrac{n_2(x_2 - x_1)}{n_1+n_2}$ et $\overline{y} - y_1 = \dfrac{n_2(y_2 - y_1)}{n_1+n_2}$. La droite (G_1G_2) a pour coefficient directeur $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ et passe par G_1, donc son ordonnée à l'origine vaut $y_1 - ax_1$ et son équation s'écrit $y = y_1 + a(x - x_1)$. Pour $x = \overline{x}$: $y_1 + a \times \dfrac{n_2(x_2 - x_1)}{n_1+n_2} = y_1 + \dfrac{n_2(y_2 - y_1)}{n_1+n_2} = \overline{y}$, donc G appartient à (G_1G_2). (0,5 pt pour les coordonnées de G, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Méthode — Pour comparer deux expressions, on étudie le signe de leur différence, mise au même dénominateur : c'est ainsi qu'on prouve $p_1 \leqslant p \leqslant p_2$ ou que la baisse réciproque est plus faible que la hausse.

Exercice 3 – Problème — Le tri des déchets dans une résidence *(5 pts)*

a) A : $0{,}8 \times 90 = 72$ foyers trient, $90 - 72 = 18$ non. B : $0{,}6 \times 150 = 90$ trient, $150 - 90 = 60$ non. Totaux : $72 + 90 = 162$ trient, $18 + 60 = 78$ non, 240 foyers. Fréquence : $\dfrac{162}{240} = 0{,}675$, soit $67{,}5\,\%$, entre $60\,\%$ et $80\,\%$ mais plus près de $60\,\%$, car B compte plus de foyers que A. (0,5 pt pour le tableau, 0,5 pt pour la fréquence) (1)

b) Parmi les 150 foyers de B : $\dfrac{60}{150} = 0{,}4$, soit $40\,\%$ ne trient pas. L'affiche, elle, parle d'une autre population de référence : parmi les 78 foyers qui ne trient pas, 60 habitent B, soit $\dfrac{60}{78} = \dfrac{10}{13} \approx 0{,}769$, environ $76{,}9\,\%$. C'est un peu plus des trois quarts : l'ordre de grandeur est juste, « plus des trois quarts » serait exact. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Il faut $0{,}75 \times 240 = 180$ foyers qui trient, soit $180 - 162 = 18$ de plus, tous dans B, qui en compterait alors $90 + 18 = 108$. Fréquence dans B : $\dfrac{108}{150} = 0{,}72$, soit $72\,\%$, c'est-à-dire 12 points de plus. Nombre de foyers de B qui trient : $\dfrac{108 - 90}{90} = \dfrac{18}{90} = 0{,}2$, soit une hausse de $20\,\%$. (0,5 pt pour les 18 foyers et la fréquence, 0,5 pt pour les points et le taux) (1)

d) Avec n foyers dans C, dont $0{,}9n$ trient : $\dfrac{162 + 0{,}9n}{240 + n} = 0{,}75 \iff 162 + 0{,}9n = 180 + 0{,}75n \iff 0{,}15n = 18 \iff n = 120$. Contrôle : $162 + 108 = 270$ foyers qui trient sur 360, et $\dfrac{270}{360} = 0{,}75$. (0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour sa résolution) (1)

e) Coefficient sur 2025 et 2026 : $0{,}8 \times 0{,}85 = 0{,}68$ (baisse de $32\,\%$, pas de $35\,\%$). Une baisse d'au moins $40\,\%$ demande un coefficient global au plus égal à 0,6. En notant CM_3 le coefficient multiplicateur de 2027 : $0{,}68 \times CM_3 \leqslant 0{,}6 \iff CM_3 \leqslant \dfrac{0{,}6}{0{,}68} = \dfrac{60}{68} = \dfrac{15}{17}$. Or $1 - \dfrac{15}{17} = \dfrac{2}{17} \approx 0{,}118$: il faut en 2027 une baisse d'au moins $\dfrac{2}{17}$, soit environ $11{,}8\,\%$ (et non $40 - 35 = 5\,\%$). (0,5 pt pour l'inéquation, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Piège — Un objectif global se traduit en coefficient global : le taux qui manque s'obtient en divisant des coefficients, jamais en soustrayant des pourcentages.

Exercice 4 – Problème — Les licenciés d'une fédération *(5 pts)*

a) $G_1 : \dfrac{0+1+2+3}{4} = 1{,}5$ et $\dfrac{20{,}6+22{,}2+23{,}6+25{,}4}{4} = \dfrac{91{,}8}{4} = 22{,}95$. $G_2 : \dfrac{4+5+6+7}{4} = 5{,}5$ et $\dfrac{27{,}1+29+30{,}7+32{,}2}{4} = \dfrac{119}{4} = 29{,}75$. Coefficient directeur : $\dfrac{29{,}75-22{,}95}{5{,}5-1{,}5} = \dfrac{6{,}8}{4} = 1{,}7$; ordonnée à l'origine : $22{,}95 - 1{,}7 \times 1{,}5 = 22{,}95 - 2{,}55 = 20{,}4$. Droite de Mayer : $y = 1{,}7x + 20{,}4$. (0,5 pt pour G_1 et G_2, 0,5 pt pour l'équation) (1)

b) Abscisse de G : $\dfrac{0+1+2+3+4+5+6+7}{8} = \dfrac{28}{8} = 3{,}5$; ordonnée : $\dfrac{91{,}8+119}{8} = \dfrac{210{,}8}{8} = 26{,}35$. Mayer : $1{,}7 \times 3{,}5 + 20{,}4 = 5{,}95 + 20{,}4 = 26{,}35$, donc G est sur la droite de Mayer. D : $1{,}69 \times 3{,}5 + 20{,}45 = 5{,}915 + 20{,}45 = 26{,}365$. L'écart de 0,015 vient de l'arrondi du coefficient directeur (il vaut environ 1,686) : la droite des moindres carrés exacte passe par G. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) 2030 correspond à $x = 12$. Mayer : $1{,}7 \times 12 + 20{,}4 = 20{,}4 + 20{,}4 = 40{,}8$, soit environ 40 800 licenciés. D : $1{,}69 \times 12 + 20{,}45 = 20{,}28 + 20{,}45 = 40{,}73$, soit environ 40 730 licenciés. Les deux estimations sont proches, mais ce sont des extrapolations à cinq ans au-delà des données ($12 > 7$) : elles supposent que la tendance se maintient. (0,5 pt pour les calculs, 0,5 pt pour la réserve) (1)

d) De 2018 à 2019 : $\dfrac{22{,}2-20{,}6}{20{,}6} = \dfrac{1{,}6}{20{,}6} \approx 0{,}078$, soit environ $+7{,}8\,\%$. De 2024 à 2025 : $\dfrac{32{,}2-30{,}7}{30{,}7} = \dfrac{1{,}5}{30{,}7} \approx 0{,}049$, soit environ $+4{,}9\,\%$. Les hausses annuelles en milliers restent à peu près stables (entre 1,4 et 1,9), mais elles portent sur des effectifs de plus en plus grands : le taux diminue. La croissance est à peu près affine, pas à taux constant, et « 8 % par an » ne décrit que le début de la période. (0,5 pt pour les taux, 0,5 pt pour la discussion) (1)

e) Les valeurs estimées sont $1{,}7x + 20{,}4$ puis $1{,}7(x+1) + 20{,}4$, dont la différence vaut 1,7 : le taux vaut $\dfrac{1{,}7}{1{,}7x + 20{,}4}$. Comme $1{,}7x + 20{,}4 > 0$: $\dfrac{1{,}7}{1{,}7x+20{,}4} < 0{,}04 \iff 1{,}7 < 0{,}068x + 0{,}816 \iff 0{,}068x > 0{,}884 \iff x > 13$. Pour $x = 13$, le taux vaut exactement $\dfrac{1{,}7}{42{,}5} = 0{,}04$; il faut donc $x = 14$, soit la hausse de 2032 à 2033 : 2033 est la première année concernée. (0,5 pt pour le taux, 0,5 pt pour l'inéquation et l'année) (1)

Astuce — Pour choisir entre une hausse constante en valeur et une hausse constante en pourcentage, on compare les différences successives et les quotients successifs : la droite convient quand ce sont les différences qui restent stables.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Construire une série *(3 pts)*

a) On cherche $a \leqslant b \leqslant 8 \leqslant d \leqslant e$ avec $a+b+8+d+e = 5 \times 10 = 50$ et $e - a = 12$. Avec $a = 4$ et $e = 16$, il faut $b + d = 50 - 28 = 22$, par exemple $b = 7$ et $d = 15$. Série 4 ; 7 ; 8 ; 15 ; 16 : somme 50, donc moyenne 10 ; médiane 8 ; étendue $16 - 4 = 12$. D'autres réponses sont possibles. (0,5 pt pour la série, 0,5 pt pour les vérifications) (1)

b) Multiplier par 1,1, nombre positif, ne change pas l'ordre des valeurs : la médiane est toujours la 3e valeur, multipliée par 1,1. La somme est multipliée par 1,1, donc la moyenne aussi ; l'étendue devient $1{,}1e - 1{,}1a = 1{,}1(e-a)$. Les trois augmentent de 10 %. En ajoutant 1, la moyenne et la médiane augmentent de 1 (ce qui ne fait 10 % que si elles valent 10) et l'étendue ne change pas : ce n'est plus vrai. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Supposons qu'une telle série existe, rangée : $a \leqslant b \leqslant 8 \leqslant d \leqslant e$ avec $e = a + 4$. Comme $a \leqslant b \leqslant 8$, on a $e \leqslant 12$, donc $d \leqslant 12$. La somme vérifie alors $a+b+8+d+e \leqslant 8+8+8+12+12 = 48$. Or une moyenne de 10 impose une somme de 50 : contradiction, aucune série ne convient. (0,5 pt pour l'encadrement de d et e, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Méthode — Pour prouver qu'une série n'existe pas, on encadre la somme de ses valeurs : si la plus grande somme possible reste inférieure à celle qu'impose la moyenne, aucune série ne convient.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).