

Corrigé et barème – Dérivation : nombre dérivé et tangente

Taux de variation, nombre dérivé et tangente (sans spé maths)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Taux de variation et nombre dérivé

(4 pts)

- a) $f(-1) = 3 + 1 = 4$ et $f(2) = 12 - 2 = 10$; taux $= \frac{10-4}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$. (1)
- b) $f(2+h) = 3(4+4h+h^2) - (2+h) = 12+12h+3h^2-2-h = 10+11h+3h^2$, donc $f(2+h) - f(2) = 11h+3h^2 = h(11+3h)$; en divisant par h non nul, le taux vaut $11+3h$. (1)
- c) Quand h tend vers 0, $11+3h$ tend vers 11 : $f'(2) = 11$. (1)
- d) $y = 11(x-2) + 10 = 11x - 22 + 10$, soit $y = 11x - 12$ (pour $x = 2$ on retrouve bien 10). (1)

Erreur fréquente — Le taux de variation entre deux bornes et le nombre dérivé en un point ne se calculent pas de la même façon : le second exige le passage à la limite.

Exercice 2 – Lecture d'un tableau de nombres dérivés

(4 pts)

- a) $f(0) = -2$ et $f'(0) = 3$: $y = 3x - 2$. (1)
- b) $f(2) = 1$ et $f'(2) = 0$: $y = 1$, tangente horizontale. (1)
- c) Tangente en 5 : $y = -2(x-5) + 4 = -2x + 14$; pour $x = 7$, $-14 + 14 = 0$: le point appartient bien à cette tangente. (1)
- d) Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur, ici -1 : c'est la tangente au point d'abscisse -3 , d'équation $y = -(x+3) + 6 = -x + 3$. (1)

Repère — Dans un tel tableau, la ligne $f(x)$ fournit l'ordonnée du point de contact et la ligne $f'(x)$ la pente : chaque tangente se reconstruit avec une seule formule.

Exercice 3 – Étude d'une tangente

(4 pts)

- a) $f(1) = 3$ et $f(1+h) = 1+3h+3h^2+h^3+2+2h = 3+5h+3h^2+h^3$, donc la différence vaut $h(5+3h+h^2)$; en divisant par h non nul, le taux vaut $5+3h+h^2$. (1)
- b) Quand h tend vers 0, $3h$ et h^2 tendent vers 0 : $f'(1) = 5$. (1)
- c) $y = 5(x-1) + 3 = 5x - 5 + 3$, soit $y = 5x - 2$. (1)
- d) Pour $x = -2$: $5 \times (-2) - 2 = -12$, le point appartient à T ; et $f(-2) = -8 - 4 = -12$, il appartient aussi à C_f . La tangente recoupe donc la courbe en un point différent du point de contact. (1)

Le point clé — Une tangente peut parfaitement recouper la courbe ailleurs : la tangence ne se lit qu'au voisinage immédiat du point de contact.

Exercice 4 – Température d'une serre

(4 pts)

- a) $T(0) = 20$ et $T(4) = 4 - 8 + 20 = 16$; taux $= \frac{16-20}{4} = -1$, soit -1 °C par heure. (1)
- b) $T(a+h) - T(a) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{4} - 2h = \frac{2ah+h^2}{4} - 2h = h \left(\frac{2a+h}{4} - 2 \right)$; le taux vaut $\frac{2a+h}{4} - 2$, qui tend vers $\frac{a}{2} - 2$ quand h tend vers 0. (1)
- c) $T'(6) = 3 - 2 = 1$: à $t = 6$ h, la température augmente d'environ 1 °C par heure. (1)
- d) $\frac{a}{2} - 2 = 0$ donne $a = 4$; à $t = 4$ h la tangente est horizontale et la température vaut $T(4) = 16$ °C. (1)

À retenir — Dans un contexte concret, le nombre dérivé est une vitesse de variation : son unité est celle de la grandeur divisée par celle de la variable.

Exercice 5 – Tangentes d'une parabole*(4 pts)*

- a) $f(a+h) - f(a) = (a+h)^2 - 8(a+h) - a^2 + 8a = 2ah + h^2 - 8h = h(2a + h - 8)$; le taux vaut $2a + h - 8$, qui tend vers $2a - 8$ quand h tend vers 0. (1)
- b) $2a - 8 = -2$ donne $a = 3$; $f(3) = 9 - 24 + 3 = -12$, d'où $y = -2(x - 3) - 12 = -2x - 6$. (1)
- c) Parallélisme : $2a - 8 = 4$ donne $a = 6$; $f(6) = 36 - 48 + 3 = -9$, d'où $y = 4(x - 6) - 9 = 4x - 33$. (1)
- d) On a $f'(0) = -8$ et $f(0) = 3$, donc la tangente a pour équation $y = -8x + 3$: elle passe par le point de coordonnées $(0; 3)$, pas par l'origine. L'élève a confondu l'ordonnée à l'origine $f(0)$ avec la valeur 0, ou bien $f(0)$ avec $f'(0)$. (1)

Attention — Une tangente passe par l'origine seulement si son ordonnée à l'origine est nulle, ce qui n'a aucune raison d'arriver au point d'abscisse 0.