

Corrigé et barème – Dérivée et applications

Dérivées usuelles, opérations, signe de la dérivée, tableaux de variations, extremums et optimisation —
programme de Mathématiques de 1re (sans spé)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Calculs de dérivées

(4 pts)

- a) $f'(x) = 21x^2 - 8x + 9$. (1)
- b) $g'(x) = 5(x^2 + 4) + (5x - 2) \times 2x = 5x^2 + 20 + 10x^2 - 4x = 15x^2 - 4x + 20$. (1)
- c) $h'(x) = \frac{1 \times (2x-3) - (x+7) \times 2}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x-14}{(2x-3)^2} = \frac{-17}{(2x-3)^2}$: h est décroissante. (1)
- d) $k'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2}$. (1)

Erreur fréquente — Un signe moins devant une fraction se dérive aussi : $\left(-\frac{5}{x}\right)' = +\frac{5}{x^2}$, et non $-\frac{5}{x^2}$.

Exercice 2 – Variations d'une fonction polynôme

(4 pts)

- a) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$. (1)
- b) $f'(x) = 6(x^2 + x - 6)$; $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $\frac{-1-5}{2} = -3$ et $\frac{-1+5}{2} = 2$, donc $f'(x) = 6(x + 3)(x - 2)$: positive à l'extérieur de $[-3; 2]$, négative sur $] - 3; 2[$. (1)
- c) f croissante sur $] - \infty; -3]$, décroissante sur $[-3; 2]$, croissante sur $[2; +\infty[$, avec $f(-3) = -54 + 27 + 108 + 5 = 86$ et $f(2) = 16 + 12 - 72 + 5 = -39$. (1)
- d) Maximum local égal à 86 en $x = -3$ (f' passe du + au -) et minimum local égal à -39 en $x = 2$ (f' passe du - au +). Aucun n'est global. (1)

Le point clé — La nature de l'extremum se lit dans le changement de signe de f' , jamais dans la valeur de f elle-même.

Exercice 3 – Une fonction homographique

(4 pts)

- a) Le dénominateur $x + 4$ s'annule en -4 uniquement ; il est strictement positif sur $] - 4; +\infty[$, donc h y est définie et dérivable comme quotient de fonctions affines. (1)
- b) Avec $u(x) = 3x - 8$, $u'(x) = 3$, $v(x) = x + 4$, $v'(x) = 1$: $h'(x) = \frac{3(x+4) - (3x-8)}{(x+4)^2} = \frac{3x+12-3x+8}{(x+4)^2} = \frac{20}{(x+4)^2}$. (1)
- c) Le numérateur 20 est positif et $(x + 4)^2 > 0$: $h'(x) > 0$, donc h est strictement croissante sur $] - 4; +\infty[$. (1)
- d) Non : h' ne s'annule jamais, donc aucun changement de signe et aucun extremum local ; de plus l'intervalle est ouvert, il n'y a pas non plus d'extremum atteint à une borne. (1)

Repère — Pour une fonction homographique, le numérateur de la dérivée est une constante : son signe donne d'un coup le sens de variation sur chaque intervalle.

Exercice 4 – Un enclos le long d'un mur*(4 pts)*

- a) Le grillage couvre deux côtés de longueur x et le côté parallèle au mur, de longueur $120 - 2x$. Cette longueur doit être strictement positive, donc $x < 60$, et $x > 0 : x \in]0; 60[$. L'aire vaut $A(x) = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2$. (1)
- b) $A'(x) = 120 - 4x$, qui s'annule en $x = 30$; $A'(x) > 0$ pour $x < 30$ et $A'(x) < 0$ pour $x > 30$. (1)
- c) A est croissante sur $]0; 30]$ puis décroissante sur $[30; 60[$, avec $A(30) = 30 \times 60 = 1800$. (1)
- d) L'aire est maximale pour $x = 30$ m : l'enclos mesure alors 30 m sur $120 - 60 = 60$ m, pour une aire de 1800 m^2 . (1)

Attention — Le côté contre le mur n'utilise pas de grillage : écrire $2x + 2y = 120$ au lieu de $2x + y = 120$ fausse tout le problème.

Exercice 5 – Erreur de dérivation et paramètre*(4 pts)*

- a) L'élève a multiplié les dérivées des deux facteurs, or $(uv)' \neq u'v'$. La bonne formule donne $f'(x) = 1 \times (x + 2) + (x - 6) \times 1 = 2x - 4$. (1)
- b) $g'(x) = 3x^2 + b$, donc $g'(-3) = 27 + b$. L'égalité $27 + b = 0$ donne $b = -27$. (1)
- c) $g'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x - 3)(x + 3)$: positive à l'extérieur de $[-3; 3]$, négative sur $] - 3; 3[$. Donc g est croissante sur $] - \infty; -3]$, décroissante sur $[-3; 3]$, croissante sur $[3; +\infty[$, avec un maximum local $g(-3) = -27 + 81 + 7 = 61$ et un minimum local $g(3) = 27 - 81 + 7 = -47$. (1)
- d) Non : le maximum en -3 n'est que local. Par exemple $g(10) = 1000 - 270 + 7 = 737$, valeur bien supérieure à 61, donc g n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$. (1)

À retenir — Sur un intervalle non borné, un extremum local n'est presque jamais global : une seule valeur bien choisie suffit à le prouver.